

运 筹 学

全程学习指导与习题精解

(清华第 4 版)

主 编 周华任 刘常昱 陈玉金
蔡开华 顾 洪 李喜波

东南大学出版社
• 南京 •

图书在版编目(CIP)数据

运筹学全程学习指导与习题精解 / 周华任等主编. —
南京:东南大学出版社,2013.7
ISBN 978-7-5641-4359-6

I. ①运… II. ①周… III. ①运筹学—高等学校—教
学参考资料 IV. ①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 147280 号

运筹学全程学习指导与习题精解(清华第 4 版)

主 编	周华任 刘常昱 陈玉金 蔡开华 顾 洪 李喜波	责任编辑	刘 坚 戴季东
电 话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮箱	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社 址	南京市四牌楼 2 号	邮 编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网 址	www.seupress.com	电子邮箱	press@seupress.com
经 销	全国各地新华书店	印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	718mm×1005mm 1/16	印 张	18.5 字 数 543 千
版 次	2013 年 7 月第 1 版第 1 次印刷		
书 号	ISBN 978-7-5641-4359-6		
定 价	26.00 元		

* 未经本社授权,本书内文字不得以任何方式转载、演绎,违者必究。

* 东大版图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025—83791830。

前 言

《运筹学》是高等院校理工科、管理学科和经济学科等学科各专业学生的必修课和专业基础课,也是这些专业硕士研究生入学考试的一门考试科目.同时,它也是参加全国大学生数学建模竞赛的选手的必修课目,在社会实践各方面都有着广泛的应用.为了帮助广大大学生扎实地掌握运筹学的精髓和解题技巧,提高解答各种题型的能力,我们根据清华大学编写的《运筹学》(第4版)编写了本书.

全书由以下几个部分组成:

1. 知识结构图:把本章的主要知识点用图解的方式表达出来.
2. 学习要求:根据考试及考研要求提炼每章学习要求,使读者学习时一目了然.
3. 重点难点解答:列出相应各章的重点、难点内容,并对重点、难点内容给出了相应的解释说明,以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻.
4. 课后习题全解:教材中课后习题丰富、层次多,许多基础性问题从各个角度帮助理解基本概念和基本理论,因此,我们对课后习题全部给出了详细的解答.
5. 典型例题精解:由于教材中第7章和第17章没有课后习题,本书在这两章中补充了典型例题精解,以帮助读者对相关内容得到更多的练习机会.

本书由周华任、刘常昱、陈玉金、蔡开华、顾洪、李喜波等编写.在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助,在此深表感谢.由于编者水平有限且时间仓促,错误缺点在所难免,敬请广大同行和读者批评指正.

编 者

目 录

第 1 章 运筹学概论

第 2 章 线性规划与单纯形法

知识结构图	2
学习要求	2
重点、难点解答	2
课后习题全解	2

第 3 章 对偶理论和灵敏度分析

知识结构图	20
学习要求	20
重点、难点解答	20
课后习题全解	21

第 4 章 运输问题

知识结构图	48
学习要求	48
重点、难点解答	48
课后习题全解	48

第 5 章 线性目标规划

知识结构图	78
学习要求	78
重点、难点解答	78
课后习题全解	79

第 6 章 整数线性规划

知识结构图	86
学习要求	86
重点、难点解答	86
课后习题全解	86

第 7 章 无约束问题

知识结构图	105
学习要求	105
重点、难点解答	105

典型例题精解	106
--------------	-----

第 8 章 约束极值问题

知识结构图	111
学习要求	111
重点、难点解答	111
课后习题全解	111

第 9 章 动态规划的基本方法

知识结构图	127
学习要求	127
重点、难点解答	127
课后习题全解	128

第 10 章 动态规划应用举例

知识结构图	141
学习要求	141
重点、难点解答	141
课后习题全解	141

第 11 章 图与网络优化

知识结构图	181
学习要求	181
重点、难点解答	181
课后习题全解	182

第 12 章 网络计划

知识结构图	210
学习要求	210
重点、难点解答	211
课后习题全解	211

第 13 章 排队论

知识结构图	216
学习要求	216
重点、难点解答	217
课后习题全解	217

第 14 章 存储论

知识结构图	233
学习要求	233
重点、难点解答	233

课后习题全解	234
--------------	-----

第 15 章 对策论基础

知识结构图	242
学习要求	242
重点、难点解答	242
课后习题全解	243

第 16 章 单目标决策

知识结构图	262
学习要求	262
重点、难点解答	262
课后习题全解	263

第 17 章 多目标决策

知识结构图	276
学习要求	276
重点、难点解答	276
典型例题精解	277

第 18 章 启发式方法

知识结构图	281
学习要求	281
课后习题全解	281

第 1 章 运筹学概论

现代运筹学的兴起可以追溯到二十世纪初期,但其概念和方法的系统提出却是在第二次世界大战期间.当时,为了在大范围的空战演习中评价新的技术,英国科学家们致力于研究对新技术的有效性的度量,这一研究被称为“Operational Research”(简称为 OR),这就是运筹学名称的由来.

运筹学是使用科学的方法去研究人类对各种资源的运用、筹划活动的基本规律,以便发挥有限资源的最大效益,来达到总体全局优化的目标.这里的“资源”是广义的,既包括物质材料,也包括人力设备;既包括技术装备,也包括社会结构.

第二次世界大战结束后,运筹学的研究中心从英国转移到了美国,从军事部门转移到了管理部门,研究的范围也渐趋扩大.但是运筹学的真正发展是在 20 世纪 50 和 60 年代,其标志是 1949 年线性规划理论的建立.然后,于 1951 年开始创立了非线性规划理论;1954 年建立了网络流理论;1955 年创立随机规划以及 1958 年创立了整数规划理论.其他,如排队论、存储论和马氏决策理论也在同期得到了迅速的发展.在钱学森、许国志教授的大力倡导下,我国第一个运筹学小组于 1956 年在中国科学院力学研究所成立,并于 1958 年组建成运筹学研究室.同年,数学研究所在华罗庚教授的领导下也开始从事运筹学的研究,并于 1959 年建立了运筹学研究室.从那时开始,在钱学森、华罗庚、许国志、越民义教授的直接指导和积极参与下,运筹学在中国取得了蓬勃的发展.自 1991 年中国运筹学会成为中国科协的一员以来,在科协领导的关怀和指导下,工作上上了一个新的台阶.

运筹学是一门独立的新兴科学,这早已为国际社会所公认.说它是独立的,因为它区别于其他学科(例:基础数学、物理、生命科学等),有它本身特定的研究对象,它有自成系统的基础理论,以及相对独立的研究方法和工具.它的发展与社会科学、技术科学和军事科学的发展紧密相关,已成为一项工程与管理学科不可缺少的基础性学科.它的方法与实践已在科学管理、工程技术、社会经济、军事决策等方面起着重要的作用并已产生巨大的经济效益和社会效益.同时,运筹学以越来越快的速度渗透到信息科学、生命科学、材料科学和能源科学等前沿基础性研究中去,又成为这些学科所不可缺少的研究工具.

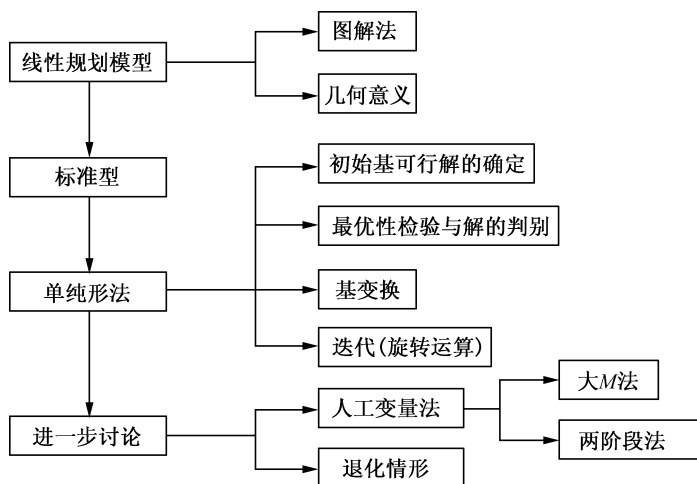
运筹学按其内涵可以分成三大部类:第一类是运筹学的基础理论,包括规划理论,随机运筹理论,组合及网络优化理论,决策理论.第二类是有特定对象的运筹学理论与方法,包括工业运筹学,农业运筹学,交通运输运筹学,公用事业运筹学,军事运筹学,金融、市场、保险运筹学等.第三类是运筹学同其他自然科学和人文科学的交叉.例如,计算运筹学,工程技术运筹学,管理运筹学,生命科学运筹学等.

在二级学科以下,又设立三级学科.以规划理论为例,下面的三级学科为线性规划,非线性规划,动态规划,参数规划,整数规划,多目标规划,不可微规划和全局优化.其他如随机运筹理论下有 13 个三级学科;组合及网络优化理论下有 4 个三级学科;决策理论下有 6 个三级学科等等.

总之,运筹学是一门基础性、交叉性、实用性均很强的学科.我们在学习和实际应用的时候,应该充分利用运筹学的优化理念,运筹学的模型和方法来提升效益.

第 2 章 线性规划与单纯形法

知识结构图



学习要求

1. 能根据实际问题列出线性规划的数学模型.
2. 掌握线性规划的图解法及其几何意义.
3. 理解线性规划的标准型和规范型.
4. 掌握单纯形法原理.
5. 掌握运用单纯形表计算线性规划问题的步骤及解法.
6. 能运用两阶段法和大 M 法求解线性规划问题, 以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题.
7. 掌握任何基可行解原表及单纯形表的对应关系.

重点、难点解答

1. 有关线性规划解的概念.
凸集, 凸组合, 可行解, 可行域, 最优解, 最优值, 基, 基变量, 非基变量, 基解, 基可行解, 可行基, 最优基; 以及注意可行解, 基解, 基可行解, 最优解之间的关系.
2. 有关线性规划解的方法.
图解法, 单纯形法, 大 M 法, 两阶段法.

课后习题全解

- 2.1 用图解法求解下列线性规划问题, 并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解.

$$(1) \max z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \min z = x_1 + 1.5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 (1) 图 2-1 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域, 目标函数 $z = x_1 + 3x_2$, 即 $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{z}{3}$ 是斜率为 $-\frac{1}{3}$ 的一族平行线, 易知 $x_1 = 3, x_2 = 0$ 为可行解, 由线性规划的性质知, 其最值在可行域的顶点取得, 将直线 $x_1 + 3x_2 = 3$ 沿其法线方向逐渐向上平移, 直至 A 点, A 点坐标为 (2, 4).

$$\therefore \max z = 2 + 3 \times 4 = 14$$

此线性规划问题有唯一最优解.

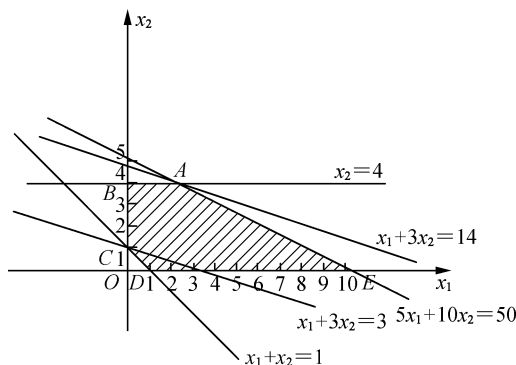


图 2-1

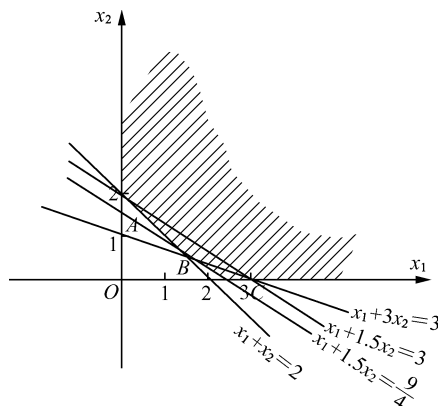


图 2-2

(2) 图 2-2 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域, 目标函数 $z = x_1 + 1.5x_2$, 即 $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}z$ 是斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的一族平行线, 易知 $x_1 = 3, x_2 = 0$ 为可行解, 由线性规划的性质知, 其最值在可行域的顶点取得.

将直线 $x_1 + 1.5x_2 = 3$ 沿其法线方向逐渐向下平移, 直至 B 点, B 点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\therefore \min z = \frac{3}{2} + 1.5 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

此线性规划问题有唯一最优解.

(3) 图 2-3 中阴影部分为此线性规划问题的可行域, 目标函数 $z = 2x_1 + 2x_2$, 即 $x_2 = -x_1 + \frac{z}{2}$ 是斜率

为 -1 的一族平行线,易知 $x_1=0, x_2=0$ 为可行解.在将直线 $2x_1+2x_2=0$ 沿其法线方向逐渐向上平移的过程中发现:目标函数的值可以增加至无穷大.故此线性规划问题为无界解.

(4) 如图 2-4 所示,此问题的可行域为空集,故此线性规划问题无可行解.

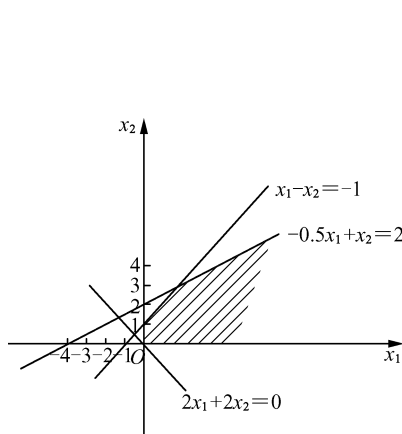


图 2-3

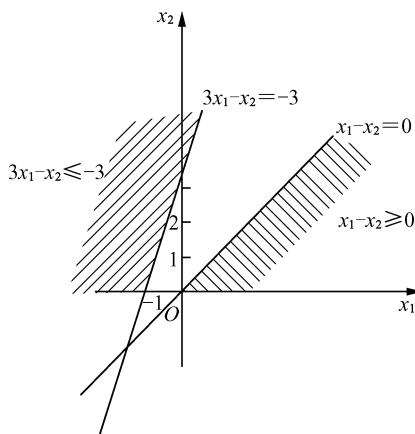


图 2-4

2.2 将下列线性规划问题变换成标准型,并列出初始单纯形表.

(1) $\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$

(2) $\max s = z_k / p_k$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} x_{ik} \\ \sum_{k=1}^m -x_{ik} = -1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ x_{ik} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \end{cases}$$

【解】(1) 将此线性规划问题化为标准型.

令 $x_4 = x_5 - x_6, z' = -z$, 其中 $x_5, x_6 \geq 0$.

$$\therefore \max z' = -\min(-z') = -\min z$$

则得到标准型为

$$\begin{aligned} \max z' &= 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_5 - x_6) + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 - Mx_9 - Mx_{10} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 + x_{10} = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 + x_7 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 - 2x_6 - x_8 + x_9 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 M 是一个任意大的正数.

初始单纯形表见表 2-1.

表 2-1

$c_j \rightarrow$			3	-4	2	-5	5	0	0	-M	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	

$-M$	x_{10}	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	-1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	-2	[3]	-1	2	-2	0	-1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	$\frac{2}{3}$

(2) 在上述问题的约束条件中加入人工变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 得

$$\max s = \frac{1}{p_k} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} x_{ik} - Mx_1 - Mx_2 - \dots - Mx_n$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + \sum_{k=1}^m x_{ik} = 1 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ik} \geq 0, x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数.

初始单纯形表见表 2-2.

表 2-2

c_j		$-M$	$-M$	$\dots$	$-M$	$\frac{a_{11}}{p_k}$	$\frac{a_{12}}{p_k}$	$\dots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}$	$\dots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}$	$\frac{a_{n2}}{p_k}$	$\dots$	$\frac{a_{nm}}{p_k}$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1m}	$\dots$	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nm}
$-M$	x_1	1	1	0	$\dots$	0	1	1	$\dots$	1	$\dots$	0	0	$\dots$	0
$-M$	x_2	1	0	1	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$-M$	x_n	1	0	0	$\dots$	1	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	1	$\dots$	1
$-s$	nM	0	0	$\dots$	0	$\frac{a_{11}}{p_k}+M$	$\frac{a_{12}}{p_k}+M$	$\dots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}+M$	$\dots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}+M$	$\frac{a_{n2}}{p_k}+M$	$\dots$	$\frac{a_{nm}}{p_k}+M$	

2.3 在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基本解. 指出哪些是基本可行解, 并代入目标函数, 确定哪一个是最优解.

(1) $\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$

(2) $\max z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 (1) 此线性规划问题的系数矩阵 A 为

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

令 $A = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

则 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

① $\because P_1, P_2$ 线性无关, $\therefore (P_1, P_2)$ 为基, x_1, x_2 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 2x_2 = -3 - 6x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

基解 $X^{(1)} = (1, 2, 0, 0)^T$ 为可行解.

$$z_1 = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 0 + 7 \times 0 = 8$$

② $\because P_1, P_3$ 线性无关, $\therefore (P_1, P_3)$ 为基, x_1, x_3 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 8 - 3x_2 + 4x_4 \\ x_1 + 6x_3 = -3 + 2x_2 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 8 \\ x_1 + 6x_3 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{45}{13} \\ x_3 = -\frac{14}{13} \end{cases}$$

基解 $X^{(2)} = \left(\frac{45}{13}, 0, -\frac{14}{13}, 0\right)^T$ 是非可行解.

③ $\because P_1, P_4$ 线性无关, $\therefore (P_1, P_4)$ 为基, x_1, x_4 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = 8 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 - 7x_4 = -3 + 2x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 7x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{34}{5} \\ x_4 = \frac{7}{5} \end{cases}$$

基解 $X^{(3)} = \left(\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5}\right)^T$ 为可行解.

$$z_3 = 2 \times \frac{34}{5} + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 7 \times \frac{7}{5} = \frac{117}{5}$$

④ $\because P_2, P_3$ 线性无关, $\therefore (P_2, P_3)$ 为基, x_2, x_3 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 3x_2 - x_3 = 8 - 2x_1 + 4x_4 \\ -2x_2 + 6x_3 = -3 - x_1 + 7x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 8 \\ -2x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{45}{16} \\ x_3 = \frac{7}{16} \end{cases}$$

基解 $X^{(4)} = \left(0, \frac{45}{16}, \frac{7}{16}, 0\right)^T$ 为可行解.

$$z_4 = 2 \times 0 + 3 \times \frac{45}{16} + 4 \times \frac{7}{16} + 7 \times 0 = \frac{163}{16}$$

⑤ $\because P_2, P_4$ 线性无关, $\therefore (P_2, P_4)$ 为基, x_2, x_4 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 3x_2 - 4x_4 = 8 - 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 - 7x_4 = -3 - x_1 - 6x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_2 - 4x_4 = 8 \\ -2x_2 - 7x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{68}{29} \\ x_4 = -\frac{7}{29} \end{cases}$$

基解 $X^{(5)} = \left(0, \frac{68}{29}, 0, -\frac{7}{29}\right)^T$ 为非可行解.

⑥ $\because P_3, P_4$ 线性无关, $\therefore (P_3, P_4)$ 为基, x_3, x_4 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} -x_3 - 4x_4 = 8 - 2x_1 - 3x_2 \\ 6x_3 - 7x_4 = -3 - x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} -x_3 - 4x_4 = 8 \\ 6x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{68}{31} \\ x_4 = -\frac{45}{31} \end{cases}$$

基解 $X^{(6)} = \left(0, 0, -\frac{68}{31}, -\frac{45}{31}\right)^T$ 为非可行解.

比较 z_1, z_3, z_4 , 可知 $z_3 = \frac{117}{5}$ 为最大值.

$\therefore$ 最优解为 $X^{(3)} = \left(\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5}\right)^T$.

(2) 此线性规划问题的系数矩阵 A 为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

令 $A = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, 则

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

① $\because P_1, P_2$ 线性无关, $\therefore (P_1, P_2)$ 为基, x_1, x_2 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 - 3x_3 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

基解 $X^{(1)} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0\right)^T$ 为非可行解.

② $\because P_1, P_3$ 线性无关

$\therefore (P_1, P_3)$ 为基, x_1, x_3 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 3 - x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_3 = \frac{11}{5} \end{cases}$$

基解 $X^{(2)} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)^T$ 为可行解.

$$z_2 = 5 \times \frac{2}{5} - 2 \times 0 + 3 \times \frac{11}{5} - 6 \times 0 = \frac{43}{5}$$

③ $\because P_1, P_4$ 线性无关, $\therefore (P_1, P_4)$ 为基, x_1, x_4 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2, x_3 = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_4 = \frac{11}{6} \end{cases}$$

基解 $X^{(3)} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{11}{6}\right)^T$ 为非可行解.

④ $\because P_2, P_3$ 线性无关, $\therefore (P_2, P_3)$ 为基, x_2, x_3 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ x_2 + x_3 = 3 - 2x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_4 = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

基解 $X^{(4)} = (0, 2, 1, 0)^T$ 为可行解.

$$z_4 = 5 \times 0 - 2 \times 2 + 3 \times 1 - 6 \times 0 = -1$$

⑤ $\because P_2, P_4$ 线性相关, $\therefore x_2, x_4$ 不能构成基变量.

⑥ $\because P_3, P_4$ 线性无关, (P_3, P_4) 为基, x_3, x_4 为基变量.

$$\therefore \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1, x_2 = 0$, 得

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

基解 $X^{(6)} = (0, 0, 1, 1)^T$ 为可行解.

$$z_6 = 5 \times 0 - 2 \times 0 + 3 \times 1 - 6 \times 1 = -3$$

比较 z_2, z_4, z_6 , 可知 $z_2 = \frac{43}{5}$ 为最大值.

$$\therefore \text{最优解为 } X^{(2)} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)^T.$$

2.4 用单纯形法求解习题 2.1 中线性规划问题(1)~(4), 要求:

(1) 分别验证在 2.3.3 节和 2.5.2 节给出的问题具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解及无解时

的判别标准.

(2) 当问题有可行解时,指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上哪一个顶点.

【解】 (1) 标准型为

$$\max z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 50 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

c_j			1	3	0	0	0	θ_i
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	50	5	10	1	0	0	5
0	x_4	-1	-1	$[-1]$	0	1	0	1
0	x_5	4	0	1	0	0	1	4
$-z$		0	1	3	0	0	0	

续表

0	x_3	40	-5	0	1	10	0	4
3	x_2	1	1	1	0	-1	0	-1
0	x_5	3	-1	0	0	[1]	1	3
$-z$		-3	-2	0	0	+3	0	
0	x_3	10	[5]	0	1	0	-10	2
3	x_2	4	0	1	0	0	1	—
0	x_4	3	-1	0	0	1	1	-3
$-z$		-12	1	0	0	0	-3	
1	x_1	2	1	0	1/5	0	-2	
3	x_2	4	0	1	0	0	1	
0	x_4	5	0	0	1/5	1	-1	
$-z$		-14	0	0	-1/5	0	-1	

得最优解 $X^* = (2, 4, 0, 5, 0)^T$

$$\max z = 14$$

$$(2) \min z = x_1 + 1.5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_5 + M \cdot x_6 \quad (M \text{ 为无穷大正数})$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

c_j			1	1.5	0	0	m	M	θ_i
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
M	x_5	3	1	[3]	-1	0	1	0	1
M	x_6	2	1	1	0	-1	0	1	2
$-z$		$-5M$	$1-2M$	$1.5-4M$	M	M	0	0	
1.5	x_2	1	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	3
M	x_6	1	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	1/3	-1	-1/3	1	3/2
$-z$		$-M-1.5$	$-\frac{2}{3}M+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}M$	M	$\frac{M}{3}-\frac{1}{2}$	0	
1.5	x_2	1/2	0	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	
1	x_1	3/2	1	0	1/2	-3/2	-1/2	3/2	
$-z$		-9/4	0	0	1/4	3/4	$M-\frac{1}{4}$	$M-\frac{3}{4}$	

由此得最优解. $(3/2, 1/2, 0, 0, 0, 0)^T$

$$\min z = 9/4$$

$$(3) \max z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -0.5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

c_j			2	2	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	-1	[1]	1	0	1
0	x_4	2	-1/2	1	0	1	2
$-z$		0	2	2	0	0	
2	x_2	1	-1	1	1	0	-1
0	x_4	1	[1/2]	0	-1	1	2
$-z$		-2	4	0	-2	0	
2	x_2	3	0	1	-1	2	-2
2	x_1	2	1	0	-2	2	-1
$-z$		-10	0	0	6	-8	

由上表可知,此线性规划问题为无界解.

$$(4) \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

c_j			1	1	0	0	θ_i
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	0	-1	[1]	1	0	0
0	x_4	-3	3	-1	0	1	3
$-z$		0	1	1	0	0	
1	x_2	0	[-1]	1	1	0	0
0	x_4	-3	2	0	1	1	-3/2
$-z$		-1	2	0	-1	0	
1	x_1	0	1	[-1]	-1	0	0
0	x_4	-3	0	2	3	1	-3/2
$-z$		-1	0	2	1	0	
1	x_2	0	-1	1	1	0	
0	x_4	-3	2	0	1	1	
$-z$		-1	2	0	-1	0	

无解.

2.5 以

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

为例,具体说明当目标函数中变量的系数怎样改变时,使满足约束条件的可行域的每一个顶点,都有可能使目标函数值达到最优.

【解】 目标函数 $\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

(1) 当 $c_2 \neq 0$ 时, $x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2} = kx_1 + \frac{z}{c_2}$, 其中 $k = -\frac{c_1}{c_2}$

由图 2-5 知, $k_{AB} = -\frac{3}{5}$, $k_{BC} = -3$

① $k < k_{BC}$, 即 $k < -3$ 时, c_1, c_2 同号.

i) 当 $c_2 > 0$ 时, 目标函数在 C 点取得最大值.

ii) 当 $c_2 < 0$ 时, 目标函数在 O 点取得最大值.

② $k_{BC} < k < k_{AB}$, 即 $-3 < k < -\frac{3}{5}$ 时, c_1, c_2 同号.

i) 当 $c_2 > 0$ 时, 目标函数在 B 点取得最大值.

ii) 当 $c_2 < 0$ 时, 目标函数在 O 点取得最大值.

③ $k_{AB} < k < 0$ 时, 即 $-\frac{3}{5} < k < 0$ 时, c_1, c_2 同号.

i) 当 $c_2 > 0$ 时, 目标函数在 A 点取得最大值.

ii) 当 $c_2 < 0$ 时, 目标函数在 O 点取得最大值.

④ 当 $k > 0$ 时, c_1, c_2 异号.

i) $c_2 > 0, c_1 < 0$ 时, 目标函数在 A 点取得最大值.

ii) $c_2 < 0, c_1 > 0$ 时, 目标函数在 C 点取得最大值.

⑤ $k = k_{AB}$, 即 $k = -\frac{3}{5}$ 时, c_1, c_2 同号.

i) $c_2 > 0$ 时, 目标函数在线段 AB 上任意一点取得最大值.

ii) $c_2 < 0$ 时, 目标函数在 O 点取得最大值.

⑥ $k = k_{BC}$, 即 $k = -3$ 时, c_1, c_2 同号.

i) $c_2 > 0$ 时, 目标函数在线段 BC 上任意一点取得最大值.

ii) $c_2 < 0$ 时, 目标函数在 O 点取得最大值.

⑦ $k = 0$ 时, $c_1 = 0$

i) $c_2 > 0$ 时, 目标函数在 A 点取得最大值.

ii) $c_2 < 0$ 时, 目标函数在线段 OC 上任意一点取得最大值.

(2) 当 $c_2 = 0$ 时, $\max z = c_1 x_1$

① $c_1 > 0$ 时, 目标函数在 C 点取得最大值.

② $c_1 < 0$ 时, 目标函数在线段 OA 上任意一点取得最大值.

③ $c_1 = 0$ 时, 在可行域的任意一点取得最大值.

2.6 分别用单纯形法中的大 M 法和两阶段法求解下述线性规划问题, 并指出属哪一类解.

(1) $\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

(2) $\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 (1) 解法一: 大 M 法

将上述问题化为标准型式, 并加入人工变量得:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6$$

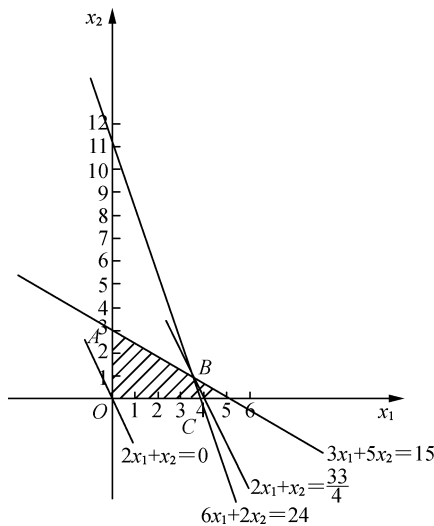


图 2-5

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数.

对于此线性规划问题,用单纯形表进行计算,见表 2-3.

表 2-3

c_j			2	3	-5	-M	0	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
-M	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
-z		17M	3M+2	3-4M	2M-5	0	-M	0	
-M	x_4	2	0	$\left[\frac{7}{2}\right]$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$
2	x_1	5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—
-z		2M-10	0	$\frac{7}{2}+8$	$\frac{1}{2}M-6$	0	$\frac{1}{2}M+1$	$-\frac{3}{2}M-1$	
3	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
2	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
-z		$-\frac{102}{7}$	0	0	$-\frac{50}{7}$	$-M-\frac{16}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-M+\frac{1}{7}$	

由表 2-3 可得,此线性规划问题的最优解

$$X^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值 $\max z = 102/7$

此线性规划问题有唯一最优解.

解法二:两阶段法

第一阶段的数学模型为:

$$\begin{aligned} \min w &= x_4 + x_6 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题用单纯形表进行计算,见表 2-4.

表 2-4

c_j			0	0	0	1	0	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	7	1	1	1	1	0	0	7
1	x_6	10	[2]	-5	1	0	-1	1	5
-w		-17	-3	4	-2	0	1	0	

1	x_4	2	0	$\left[\frac{7}{2} \right]$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$
0	x_1	5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—
$-w$		-2	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
0	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	

续表 2-4

0	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
$-w$		0	0	0	0	1	0	1	

由表 2-4 可得:第一阶段的最优解

$$X^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

为原线性规划问题的基可行解.

目标函数的最优值 $\min w = 0$

第二阶段单纯形表见表 2-5.

表 2-5

c_j			2	3	-5	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	
3	x_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	
2	x_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
$-z$		$-\frac{102}{7}$	0	0	$-\frac{50}{7}$	$-\frac{1}{7}$	

由表 2-5 可得原线性规划问题的最优解

$$X^* = \left(\frac{45}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值 $\max z = 102/7$

此线性规划问题具有唯一最优解.

(2) 解法一:大 M 法.

令 $z' = -z$

则 $\max z' = -\min(-z') = -\min z$

将上述问题转化为标准型式,并加入人工变量得:

$$\begin{aligned} \max z' &= -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \end{cases} \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

其中 M 是一个任意大的正数.

对于此线性规划问题,用单纯形表进行计算,见表 2-6.

表 2-6

c_j			-2	-3	-1	0	0	$-M$	$-M$	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	8	1	[4]	2	-1	0	1	0	2
$-M$	x_7	6	3	2	0	0	-1	0	1	3
$-z'$		$14M$	$4M-2$	$6M-3$	$2M-1$	$-M$	$-M$	0	0	
-3	x_2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	8

续表 2-6

$-M$	x_7	2	$\left[\frac{5}{2}\right]$	0	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{5}$
$-z'$		$2M+6$	$\frac{5}{2}M-\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}M-\frac{3}{4}$	$-M$	$-\frac{3}{2}M+\frac{3}{4}$	0	
-3	x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	
-2	x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$-z'$	7	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}M$		

由表 2-6 可得:此线性规划问题的最优解

$$X^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值 $\min z = 7$

$\therefore$ 非基变量 x_3 的检验数 $\sigma_3 = 0$.

$\therefore$ 此线性规划问题有无穷多最优解.

解法二:两阶段法.

第一阶段的数学模型为

$$\begin{aligned} \min w &= x_6 + x_7 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题,用单纯形表进行计算,见表 2-7.

表 2-7

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	8	1	$[4]$	2	-1	0	1	0	2
1	x_7	6	3	2	0	0	-1	0	1	3
$-w$		-14	-4	-6	-2	1	1	0	0	
0	x_2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	8
1	x_7	2	$\left[\frac{5}{2}\right]$	0	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{5}$
$-w$		-2	$-\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	
0	x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	
0	x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$-w$		0	0	0	0	0	0	1	1	

由表 2-7 可得:第一阶段的最优解

$$X^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

为原线性规划问题的基可行解.

目标函数的最优值 $\min w = 0$.

第二阶段的单纯形表见表 2-8.

表 2-8

c_j			2	3	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	
2	x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
$-z$		-7	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

由表 2-8 可得:原线性规划问题的最优解

$$X^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数的最优值 $\min z = 7$.

$\therefore$ 非基变量 x_3 的检验数 $\sigma_3 = 0$.

$\therefore$ 此线性规划问题存在无穷多最优解.

2.7 求下述线性规划问题目标函数 z 的上界 z^* 和下界 z_-^* .

$$\begin{aligned} \max z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中: $1 \leq c_1 \leq 3, 4 \leq c_2 \leq 6, 8 \leq b_1 \leq 12, 10 \leq b_2 \leq 14, -1 \leq a_{11} \leq 3, 2 \leq a_{12} \leq 5, 2 \leq a_{21} \leq 4, 4 \leq a_{22} \leq 6$.

【解】(1) 要求 z 的上界 z^* , 即要求 c_1, c_2, b_1, b_2 取其最大值; $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 取其最小值. 此时, 线性规划问题为

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_3, x_4 , 得到该线性规划问题的标准型

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

计算过程如表 2-9 所示.

表 2-9

c_j			3	6	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	12	-1	2	1	0	6
0	x_4	7	1	[2]	0	1	7/2
σ_j		3	6	0	0	-	
0	x_3	5	-2	0	1	-1	1/2
6	x_2	7/2	1/2	1	0		

σ_j	0	0	0	-3		
------------	---	---	---	----	--	--

由表 2-9 可知最优解 $X^* = \left(0, \frac{7}{2}, 5, 0\right)^T$, 目标函数 z 的上界 $z^* = 6 \times \frac{7}{2} = 21$.

(2) 要求 z 的下界 z_-^* , 即要求 c_1, c_2, b_1, b_2 取其最小值; $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 取其最大值. 此时, 线性规划问题为

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

在上述问题的约束条件中加入松弛变量 x_3, x_4 , 得到的该线性规划问题的标准型

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

计算过程如表 2-10 所示.

表 2-10

c_j			1	4	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	8	3	[5]	1	0	8/5
0	x_4	5	2	3	0	1	5/3
σ_j		1	4	0	0		
4	x_2	8/5	3/5	1	1/5	0	
0	x_4	1/5	1/5	0	-3/5	1	
σ_j		-7/5	0	-4/5	0		

由表 2-10 可知, 最优解 $X^* = \left(0, \frac{8}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)^T$, 目标函数 z 的下界 $z_-^* = 0 + 4 \times \frac{8}{5} = \frac{32}{5}$.

2.8 表 2-11 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表. 表中无人工变量, $a_1, a_2, a_3, d, c_1, c_2$ 为待定常数. 试说明这些常数分别取何值时, 以下结论成立.

- (1) 表中解为唯一最优解;
- (2) 表中解为最优解, 但存在无穷多最优解;
- (3) 该线性规划问题具有无界解;
- (4) 表中解非最优, 为对解改进, 换入变量为 x_1 , 换出变量为 x_6 .

表 2-11

基 b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3 d	4	a_1	1	0	a_2	0
x_4 2	-1	-3	-	1	-1	0
x_6 3	a_3	-5	0	0	-4	1
$c_j - z_j$	c_1	c_2	0	0	-3	0

【解】 (1) 当解为唯一最优解时, 必有 $d \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$.

(2) 当解为最优解, 但存在无穷多最优解时, 必有 $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 = 0$ 或 $d \geq 0, c_1 = 0, c_2 \leq 0$.

(3) 当该问题为无界解时, 必有 $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 > 0$ 且 $a_1 \leq 0$.

(4) 当解为非最优, 为对解进行改进, 当换入变量为 x_1 , 换出变量为 x_6 , 必有 $d \geq 0, c_1 > 0$, 且 $c_1 \geq c_2$, $a_3 > 0, \frac{3}{a_3} < \frac{d}{4}$.

2.9 某昼夜服务的公交线路每天各时间区段内所需司机和乘务人员数如表 2-12:

表 2-12

班次	时 间	所需人数
1	6:00~10:00	60
2	10:00~14:00	70
3	14:00~18:00	60
4	18:00~22:00	50
5	22:00~2:00	20
6	2:00~6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间区段一开始时上班, 并连续工作八小时, 问该公交线路至少配备多少名司机和乘务人员. 列出这个问题的线性规划模型.

【解】 设 $x_k (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 表示 x_k 名司机和乘务人员第 k 班次开始上班. 由题意, 有

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_6 + x_1 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2.10 某糖果厂用原料 A、B、C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙. 已知各种牌号糖果中 A、B、C 含量, 原料成本, 各种原料的每月限制用量, 三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 2-13 所示.

表 2-13

	甲	乙	丙	原料成本 (元/kg)	每月限制用量 (kg)
A	$\geq 60\%$	$\geq 15\%$		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	$\leq 20\%$	$\leq 60\%$	$\leq 50\%$	1.00	1 200
加工费(元/kg)	0.50	0.40	0.30		
售价(元/kg)	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月应生产这三种牌号糖果各多少千克, 使该厂获利最大? 试建立这个问题的线性规划的数学模型.

【解】 设 x_1, x_2, x_3 分别为甲糖果中 A、B、C 的含量; x_4, x_5, x_6 分别为乙糖果中 A、B、C 的含量; x_7, x_8, x_9 分别为丙糖果中 A、B、C 的含量. 由题意, 有

$$\max z = (3.40 - 0.50) \times (x_1 + x_2 + x_3) + (2.85 - 0.40) \times (x_4 + x_5 + x_6)$$

$$\begin{aligned}
 & + (2.25 - 0.30) \times (x_7 + x_8 + x_9) - 2.00 \times (x_1 + x_4 + x_7) \\
 & - 1.50 \times (x_2 + x_5 + x_8) - 1.00 \times (x_3 + x_6 + x_9) \\
 \text{s. t. } & \begin{cases} \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 0.6 \\ \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 0.2 \\ \frac{x_4}{x_4 + x_5 + x_6} \geq 0.15 \\ \frac{x_6}{x_4 + x_5 + x_6} \leq 0.6 \\ \frac{x_9}{x_7 + x_8 + x_9} \leq 0.5 \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 2000 \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 2500 \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 1200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对上式进行整理得到所求问题的线性规划模型

$$\begin{aligned}
 \max z = & 0.9x_1 + 1.4x_2 + 1.9x_3 + 0.45x_4 + 0.95x_5 + 1.45x_6 - 0.05x_7 + 0.45x_8 + 0.95x_9 \\
 \text{s. t. } & \begin{cases} -0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 \leq 0 \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 \leq 0 \\ -0.85x_4 + 0.15x_5 + 0.15x_6 \leq 0 \\ -0.6x_4 - 0.6x_5 + 0.4x_6 \leq 0 \\ -0.5x_7 - 0.5x_8 + 0.5x_9 \leq 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 2000 \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 2500 \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 1200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.11 某厂生产三种产品 I, II, III. 每种产品要经过 A, B 两道工序加工. 设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序, 它们以 A_1, A_2 表示; 有三种规格的设备能完成 B 工序, 它们以 B_1, B_2, B_3 表示. 产品 I 可在 A, B 任何一种规格设备上加工. 产品 II 可在任何规格的 A 设备上加工, 但完成 B 工序时, 只能在 B_1 设备上加工; 产品 III 只能在 A_2 与 B_2 设备上加工. 已知在各种机床设备的单件工时, 原材料费, 产品销售价格, 各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表(表 2-14), 要求安排最优的生产计划, 使该厂利润最大.

表 2-14

设 备	产 品			设备有效台时	满负荷时的 设备费用(元)
	I	II	III		
A_1	5	10		6 000	300
A_2	7	9	12	10 000	321

B_1	6	8		4 000	250
B_2	4		11	7 000	783
B_3	7			4 000	200
原材料(元/件) x_0	0.25	0.35	0.50		
单 价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

【解】对产品Ⅰ来说,设以 A_1, A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_1, x_2 件,转入 B 工序时,以 B_1, B_2, B_3 完成 B 工序的产品分别为 x_3, x_4, x_5 件;对产品Ⅱ来说,设以 A_1, A_2 完成 A 工序的产品分别为 x_6, x_7 件,转入 B 工序时,以 B_1 完成 B 工序的产品为 x_8 件;对产品Ⅲ来说,设以 A_2 完成 A 工序的产品为 x_9 件,则以 B_2 完成 B 工序的产品也为 x_9 件.由上述条件可得:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_6 + x_7 = x_8$$

由题目所给的数据可得到解此问题的数学模型为:

$$\begin{aligned} \max z = & (1.25 - 0.25) \times (x_1 + x_2) + (2.00 - 0.35) \times (x_6 + x_7) + (2.80 - 0.50) \times x_9 - \frac{300}{6\,000} \times (5x_1 + 10x_6) - \\ & \frac{321}{10\,000} \times (7x_2 + 9x_7 + 12x_9) \\ & - \frac{250}{4\,000} \times (6x_3 + 8x_8) - \frac{783}{7\,000} \times (4x_4 + 11x_9) - \frac{200}{4\,000} \times 7x_5 \\ \text{s. t. } & \begin{cases} 5x_1 + 10x_6 \leq 6\,000 \\ 7x_2 + 9x_7 + 12x_9 \leq 10\,000 \\ 6x_3 + 8x_8 \leq 4\,000 \\ 4x_4 + 11x_9 \leq 7\,000 \\ 7x_5 \leq 4\,000 \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \\ x_6 + x_7 = x_8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

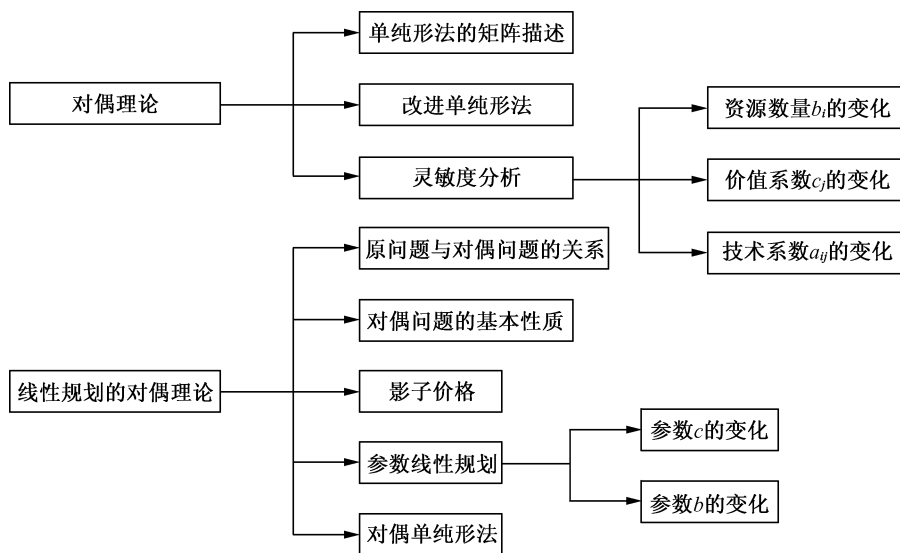
解之得最优解为:

$$x_1^* = 1\,200, x_2^* = 230, x_3^* = 0, x_4^* = 859, x_5^* = 571, x_6^* = 0, x_7^* = 500, x_8^* = 500, x_9^* = 324.$$

最优值为 1 147 元.

第3章 对偶理论和灵敏度分析

知识结构图



学习要求

1. 了解对偶问题的特点,熟悉互为对偶问题之间的关系.
2. 掌握对偶理论及其性质.
3. 掌握对偶单纯形法.
4. 熟悉灵敏度分析的概念和内容.
5. 掌握限制常数和价值系数、约束条件系数的变化对原最优解的影响.
6. 掌握增加新变量和增加新约束条件对原最优解的影响,并求出相应因素的灵敏度范围.
7. 了解参数线性规划的解法.
8. 了解影子价格的经济意义.

重点、难点解答

1. 对于一个线性规划数学模型,如果必须引入人工变量转化成规范型,则不要急于用两阶段法求解,首先应该判断其数学模型的特点:如果数学模型个数少而约束条件个数多,则可考虑将数学模型转化为对偶数学模型,先求对偶数学模型的最优解,然后利用对偶理论求出原问题最优解,如果数学模型变量个数多而约束条件个数少,则可考虑利用对偶单纯形法求原问题最优解.

对于一个灵敏分析的问题,首先需要理解最优表与初始表的换算关系,然后才能利用初始表中的变化(一般用参数的形式表示)计算出最优表中的变化,其中就包含有参数,再令最优表保持不变,求出参数的变化范围,即参数的灵敏度范围.当参数的实际变化在其灵敏度范围之内,则原最优解基保持不变.当参数的实际变化在其灵敏度范围之外,则原最优解不再是最优解,需要继续用单纯形法或对偶单纯形

法求出新最优解.

2. 对偶单纯形法的优点

(1) 初始解可以是不可行解,当检验数都为负数时,就可以进行基的变换,这时不需要加入人工变量,因此,可以简化计算.

(2) 当变量多于约束条件时,对这样的线性规划问题,用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量,因此对变量较少,而约束条件很多的线性规划问题,可先将它变换成对偶问题,然后用对偶单纯形法求解.

(3) 在灵敏度分析中,有时需要用对偶单纯形法,这样可使问题的处理简化,对偶单纯形法的局限性主要是,对大多数线性规划问题,很难找到一个初始可行基,因而这方法在求解线性规划问题时很少单独运用.

课后习题全解

3.1 用改进单纯形法(矩阵算法)求解以下线性规划问题.

$$(1) \max z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$(2) \min z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】(1) 将上述线性规划问题转化为标准型式:

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } B_0 = (P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{B_0} = (x_4, x_5)^T, \quad C_{B_0} = (0, 0),$$

$$N_0 = (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_{N_0} = (x_1, x_2, x_3)^T,$$

$$C_{N_0} = (6, -2, 3), \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\sigma_{N_0} = C_{N_0} - C_{B_0} B_0^{-1} N_0 = C_{N_0} = (6, -2, 3)$$

$\therefore x_1$ 的检验数 $\sigma_1 = 6$ 为最大的

$\therefore x_1$ 为换入变量

$$B_0^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B_0^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B_0^{-1} b_0)_i}{(B_0^{-1} P_1)_i} \mid (B_0^{-1} P_1)_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{4}{1} \right\} = 1$$

$\therefore x_4$ 为换出变量.

$$\therefore B_1 = (P_1, P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{B_1} = (x_1, x_5)^T, \quad C_{B_1} = (6, 0),$$

$$N_1 = (P_4, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_{N_1} = (x_4, x_2, x_3)^T,$$

$$C_{N_1} = (0, -2, 3), \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = B_1^{-1}b_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned} \sigma_{N_1} &= C_{N_1} - C_{B_1} B_1^{-1} N_1 \\ &= (0, -2, 3) - (6, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (0, -2, 3) - (3, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (0, -2, 3) - (3, -3, 6) \\ &= (-3, 1, -3) \end{aligned}$$

$\therefore x_2$ 的检验数 $\sigma_2 = 1$ 为正的最大的

$\therefore x_2$ 为换入变量.

$$B_1^{-1}b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B_1^{-1}b_0)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i} \mid (B_1^{-1}P_2)_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1/2} \right\} = 6$$

$\therefore x_3$ 为换出变量.

$$B_2 = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{B_2} = (x_1, x_2)^T, \quad C_{B_2} = (6, -2),$$

$$N_2 = (P_4, P_5, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_{N_2} = (x_4, x_5, x_3)^T,$$

$$C_{N_2} = (0, 0, 3), \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} b_2 = B_2^{-1}b_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned} \sigma_{N_2} &= C_{N_2} - C_{B_2} B_2^{-1} N_2 \\ &= (0, 0, 3) - (6, -2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 3) - (2, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 3) - (2, 2, 12) \\ &= (-2, -2, -9) \end{aligned}$$

$\therefore$ 非基变量的检验数均为负

$\therefore$ 原问题已达到最优解.

最优解

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_2^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ 即 } X^* = (4, 6, 0)^T$$

目标函数最优值 $\max z = 6 \times 4 - 2 \times 6 + 3 \times 0 = 12$

(2) 将上述线性规划问题化为如下形式:

$$\min z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 + M \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \quad (M \text{ 是一个任意大的正数})$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

取

$$B_0 = (P_4, P_5, P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{B_0} = (x_4, x_5, x_6)^T, \quad C_{B_0} = (M, M, 0),$$

$$N_0 = (P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{N_0} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad C_{N_0} = (2, 1, 0),$$

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_0 = (3, 6, 3)^T$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned} \sigma_{N_0} &= C_{N_0} - C_{B_0} B_0^{-1} N_0 \\ &= (2, 1, 0) - (M, M, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (2, 1, 0) - (7M, 4M, -M) \\ &= (2-7M, 1-4M, M) \end{aligned}$$

$\therefore x_1$ 的检验数 $\sigma_1 = 2-7M$ 为负的最小.

$\therefore x_1$ 为换入变量.

$$B_0^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B_0^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B_0^{-1} b)_i}{(B_0^{-1} P_1)_i} \mid (B_0^{-1} P_1)_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{3}{1} \right\} = 1$$

$\therefore x_4$ 为换出变量.

$$B_1 = (P_1, P_5, P_6) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{B_1} = (x_1, x_5, x_6)^T, \quad C_{B_1} = (2, M, 0),$$

$$N_1 = (P_4, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{N_1} = (x_4, x_2, x_3)^T, \quad C_{N_1} = (M, 1, 0),$$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = B_1^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned} \sigma_{N_1} &= C_{N_1} - C_{B_1} B_1^{-1} N_1 \\ &= (M, 1, 0) - (2, M, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (M, 1, 0) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}M, M, 0 \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (M, 1, 0) - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}M, \frac{2}{3} + \frac{5}{3}M, -M \right) \\ &= \left(\frac{7}{3}M - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - \frac{5}{3}M, M \right) \end{aligned}$$

$\therefore x_2$ 的检验数 $\sigma_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}M$ 为负的最小

$\therefore x_2$ 为换入变量.

$$B_1^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

由 θ 规则得

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B_1^{-1} b_0)_i}{(B_1^{-1} P_2)_i} \mid (B_1^{-1} P_2)_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1/3}, \frac{2}{5/3}, \frac{2}{5/3} \right\} = \frac{6}{5}$$

$\therefore x_3$ 为换出变量.

$$\begin{aligned} B_2 &= (P_1, P_2, P_6) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X_{B_2} = (x_1, x_2, x_6)^T, \quad C_{B_2} = (2, 1, 0), \\ N_2 &= (P_4, P_5, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{N_2} = (x_4, x_5, x_3)^T, \quad C_{N_2} = (M, M, 0), \\ B_2^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = B_2^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

非基变量的检验数

$$\begin{aligned}
 \sigma_{N_2} &= C_{N_2} - C_{B_2} B_2^{-1} N_2 \\
 &= (M, M, 0) - (2, 1, 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (M, M, 0) - \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (M, M, 0) - \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\
 &= \left(M - \frac{2}{5}, M - \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 非基变量的检验数均为正.

$\therefore$ 原问题已达到最优解.

最优解为

$$X^* = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T = B_2^{-1} b_0 = \left(\frac{3}{5} \quad \frac{6}{5} \quad 0\right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \min z = 2x_1 + x_2 = 2 \times \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

3.2 已知某线性规划问题,用单纯形法计算时得到的中间某两步的计算表见表3-1,试将表中空白处数字填上.

表3-1

	c_j		3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
$c_j - z_j$			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
$\vdots$								
	x_2					$-\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
	x_3					$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
	x_1					$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
$c_j - z_j$								

【解】 令 $b_1 = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right)^T$, $b_0 = (b_{01}, b_{02}, b_{03})^T$

则

$$b_1 = B_1^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ b_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{3}b_{01} = \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3}b_{01} + b_{02} = \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3}b_{01} + b_{03} = \frac{20}{3} \end{cases}$$

解得 $b_{01} = 8, b_{02} = 10, b_{03} = 12$

$$\therefore b_0 = (8 \ 10 \ 12)^T$$

$$\therefore b_2 = B_2^{-1} b_0 = \begin{pmatrix} \frac{15}{41} & \frac{8}{41} & -\frac{10}{41} \\ -\frac{6}{41} & \frac{5}{41} & \frac{4}{41} \\ -\frac{2}{41} & -\frac{12}{41} & \frac{15}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{41} \\ \frac{50}{41} \\ \frac{44}{41} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 表 3-2 中的数字填写如下:

表 3-2

c_j			3	5	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
0	x_5	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	5	$-\frac{2}{3}$	1	0
0	x_6	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	4	$-\frac{2}{3}$	0	1
$c_j - z_j$			$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0
$\vdots$								
5	x_2	$\frac{80}{41}$	0	1	0	$\frac{15}{41}$	$\frac{8}{41}$	$-\frac{10}{41}$
4	x_3	$\frac{50}{41}$	0	0	1	$-\frac{6}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{4}{41}$
3	x_1	$\frac{44}{41}$	1	0	0	$-\frac{2}{41}$	$-\frac{12}{41}$	$\frac{15}{41}$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-\frac{45}{41}$	$-\frac{24}{41}$	$-\frac{11}{41}$

3.3 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$(1) \min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geq 8 \\ 12x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 9x_4 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

$$(3) \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m_1 \leq m \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \text{ 当 } j = 1, \dots, n_1 \leq n \\ x_j \text{ 无约束, 当 } j = n_1 + 1, \dots, n \end{cases}$$

【解】 (1) 将原问题化为

$$\begin{aligned} \max(-z) &= -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix}$$

设 y_1, y_2, y_3 分别为与约束条件①②③对应的对偶变量

此问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \min(-w) &= -2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -2 \\ -3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq -2 \\ -5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq -4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max w &= 2y_1 - 3y_2 - 5y_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 - y_3 \leq 2 \\ 3y_1 - y_2 - 4y_3 \leq 2 \\ 5y_1 - 7y_2 - 6y_3 \leq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 令 $x_5 = -x_3, x_4 = x_6 - x_7$, 其中 $x_6, x_7 \geq 0$

将上述问题转化为如下形式

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 - 3x_5 + 4x_6 - 4x_7 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_5 - 3x_6 + 3x_7 \leq 5 \\ x_1 - x_2 - x_5 + 3x_6 - 3x_7 \leq -5 \\ -6x_1 - 7x_2 + 3x_5 + 5x_6 - 5x_7 \leq -8 \\ 12x_1 - 9x_2 + 9x_5 + 9x_6 - 9x_7 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix}$$

设 y_1, y_2, y_3, y_4 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量.

此问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \min w &= 5y_1 - 5y_2 - 8y_3 + 20y_4 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -y_1 + y_2 - 6y_3 + 12y_4 \geq 1 \\ y_1 - y_2 - 7y_3 - 9y_4 \geq 2 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 + 9y_4 \geq -3 \\ -3y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 9y_4 \geq 4 \\ 3y_1 - 3y_2 - 5y_3 - 9y_4 \geq -4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

令 $y'_1 = y_1 - y_2, y'_3 = -y_3$, 进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\min w = 5y'_1 + 8y'_3 + 20y_4$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} -y'_1 + 6y'_3 + 12y_4 \geq 1 \\ y'_1 + 7y'_3 - 9y_4 \geq 2 \\ -y'_1 + 3y'_3 - 9y_4 \leq 3 \\ -3y'_1 - 5y'_3 + 9y_4 = 4 \\ y'_1 \text{ 无约束}, y'_3 \leq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

(3) 将上述问题化为如下形式

$$\begin{aligned} \max(-z) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i=1, 2, \dots, m) & \text{①} \\ -\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq -a_i & (i=1, 2, \dots, m) & \text{②} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j & (j=1, 2, \dots, n) & \text{③} \\ -\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq -b_j & (j=1, 2, \dots, n) & \text{④} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

设 $y_i, y'_i, y_{m+j}, y'_{m+j}$ 分别为与约束条件①②③④相对应的对偶变量。

此问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \min(-w) &= \sum_{i=1}^m a_i y_i - \sum_{i=1}^m a_i y'_i + \sum_{j=1}^n b_j y_{m+j} - \sum_{j=1}^n b_j y'_{m+j} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} y_i + y_{m+j} - y'_i - y'_{m+j} \geq -c_{ij} & (i=1, 2, \dots, m) \\ y_i, y_{m+j}, y'_i, y'_{m+j} \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

令 $y''_i = y'_i - y_i, y''_{m+j} = y'_{m+j} - y_{m+j}$ 进行整理, 得到原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max w &= \sum_{i=1}^m a_i y''_i + \sum_{j=1}^n y''_{m+j} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} y''_i + y''_{m+j} \leq c_{ij} & (i=1, 2, \dots, m) \\ y''_i, y''_{m+j} \text{ 无约束} & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

(4) 将上述问题化为如下形式

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i=1, 2, \dots, m_1, m_1 \leq m) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i=m_1+1, m_1+2, \dots, m) \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i & (i=m_1+1, m_1+2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n_1, n_1 \leq n) \\ x_j \text{ 无约束} & (j=n_1+1, n_1+2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

令 $x_j = x'_j - x''_j$, 且 $x'_j, x''_j \geq 0$ ($j=n_1+1, n_1+2, \dots, n$)

则得到

$$\max z = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^n c_j (x'_j - x''_j)$$

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \leq b_i & (i = 1, 2, \dots, m_1, m_1 \leq m) \\ \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \leq b_i & (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m) \\ - \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j - \sum_{j=n_1+1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \leq -b_i & (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n_1, n_1 \leq n) \\ x'_j, x''_j \geq 0 & (j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n) \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$\tag{3}$$

设

$$y_i (i = 1, 2, \dots, m_1), \quad y_i (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m)$$

$$y'_i (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m)$$

分别为与约束条件①②③相对应的对偶变量.

此问题的对偶问题为

$$\begin{aligned}
 \min w &= \sum_{i=1}^m y_i b_i - \sum_{i=m_1+1}^m y'_i b_i \\
 \text{s. t. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} - \sum_{i=m_1+1}^m y'_i a_{ij} \geq c_j & (j = 1, 2, \dots, n) \\ - \sum_{i=m_1+1}^m y_i a_{ij} + \sum_{i=m_1+1}^m y'_i a_{ij} \geq -c_j & (j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n) \\ y_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \\ y'_i \geq 0 & (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m) \end{cases}
 \end{aligned}$$

令

$$y''_i = \begin{cases} y_i & (i = 1, 2, \dots, m_1) \\ y_i - y'_i & (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m) \end{cases}$$

对上式进行整理得到原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned}
 \min w &= \sum_{i=1}^m b_i y''_i \\
 \text{s. t. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y''_i \geq c_j & (j = 1, 2, \dots, n_1) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y''_i = c_j & (j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n) \\ y''_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m_1) \\ y''_i \text{ 无约束} & (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m) \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.4 判断下列说法是否正确,为什么?

- (1) 如线性规划的原问题存在可行解,则其对偶问题也一定存在可行解;
- (2) 如线性规划的对偶问题无可行解,则原问题也一定无可行解;
- (3) 如果线性规划的原问题和对偶问题都具有可行解,则该线性规划问题一定具有有限最优解.

【解】(1) 错误.原问题存在可行解,对偶问题可能存在可行解也可能无可行解.

(2) 错误.线性规划的对偶问题无可行解,则原问题可能无可行解也可能为无界解.

(3) 错误. 线性规划问题的原问题和对偶问题都具有可行解, 则该线性规划问题可能有有限最优解也可能为无界解.

3.5 设线性规划问题 1 是

$$\begin{aligned} \max z_1 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

$(y_1^*, \dots, y_m^*)$ 是其对偶问题的最优解.

又设线性规划问题 2 是

$$\begin{aligned} \max z_2 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

其中 k_i 是给定的常数, 求证

$$\max z_2 \leq \max z_1 + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

【证明】 将原问题用矩阵形式描述如下:

$$\textcircled{1} \max z_1 = CX$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \text{ 其中 } b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

设其可行解为 X_1 , 其对偶问题的最优解 $Y_1 = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 为已知.

$$\textcircled{2} \max z_2 = CX$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} AX \leq b+k \\ X \geq 0 \end{cases} \text{ 其中 } k = (k_1, k_2, \dots, k_m)^T$$

设其可行解为 X_2 , 其对偶问题的最优解为 Y_2 , ②的对偶问题为

$$\min w = Y(b+k)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

$$\because Y_2 \text{ 为最优解, } \therefore Y_2(b+k) \leq Y_1(b+k)$$

$$\because X_2 \text{ 为 } \textcircled{2} \text{ 的可行解, } \therefore AX_2 \leq b+k$$

$$\therefore Y_2 AX_2 \leq Y_2(b+k) \leq Y_1 b + Y_1 k$$

$\therefore$ 原问题与对偶问题的最优函数值相等.

$$\therefore \max z_2 \leq \max z_1 + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

3.6 已知线性规划问题 $\max z = CX, AX = b, X \geq 0$, 分别说明发生下列情况时, 其对偶问题的解的变化:

- (a) 问题的第 k 个约束条件乘上常数 $\lambda (\lambda \neq 0)$;
- (b) 将第 k 个约束条件乘上常数 $\lambda (\lambda \neq 0)$ 后加到第 r 个约束条件上;
- (c) 目标函数 $\max z = \lambda CX (\lambda \neq 0)$;
- (d) 模型中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 用 $X' = (3x_1', x_2', \dots, x_n')^T$ 代换.

【解】 (a) 因为对偶变量 $Y = C_B B^{-1}$, 第 k 个约束条件乘上 $\lambda (\lambda \neq 0)$, 即 B^{-1} 的 k 列将为变化前的 $\frac{1}{\lambda}$, 由此, 对偶问题变化后的解为

$$(y'_1, y'_2, \dots, y'_k, \dots, y'_m) = (y_1, y_2, \dots, \frac{1}{\lambda} y_k, \dots, y_m)$$

(b) 与前类似, 对偶问题变化后的解为

$$y'_r = \frac{br}{br + \lambda br} y_r, y'_i = y_i \quad (i \neq r)$$

(c) 对偶问题变化后的解为

$$y'_i = \lambda y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(d) 此时对偶问题的解与原来是一样的.

3.7 已知线性规划问题

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$$

用单纯形法求解, 得到最终单纯形表如表 3-3 所示, 要求:

(1) 求 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, b_1, b_2$ 的值;

(2) 求 c_1, c_2, c_3 的值.

表 3-3

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3/2	1	0	1	1/2	-1/2
x_2	2	1/2	1	0	-1	2
$c_j - z_j$		-3	0	0	0	-4

【解】 (1) 令初始单纯形表的增广矩阵为

$$(A_1 \mid B_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & b_2 \end{bmatrix}$$

则最终单纯形表 2-4 的增广矩阵为

$$(A_1 \mid B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

对 $(A_1 \mid B_1)$ 作初等行变换, 使其第 4, 5 列形成的矩阵为单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5/2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9/2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 5/2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = (A_1 \mid B_1)$$

由单纯形运算法则可知, $(A_1 \mid B_1)$ 与 $(A_2 \mid B_2)$ 可以经过初等行变换互相转化, 故

$$(A_1 \mid B_1) = (A_3 \mid B_3)$$

因此 $a_{11} = 9/2, a_{12} = 1, a_{13} = 4; a_{21} = 5/2, a_{22} = 1, a_{23} = 2; b_1 = 8, b_2 = 5$.

(2) 由检验数 $\sigma_j = c_j - z_j$ 的计算可得

$$\begin{cases} c_1 - \left(c_3 + \frac{1}{2}c_2\right) = -3 \\ 0 - \left(\frac{1}{2}c_3 - c_2\right) = 0 \\ 0 - \left(-\frac{1}{2}c_3 + 2c_2\right) = -4 \end{cases}$$

$$c_1 = 7, c_2 = 4, c_3 = 8$$

解之得

3.8 已知线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

对偶变量

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4, y_2^* = 1$, 试应用对偶问题的性质, 求原问题的最优解.

【解】 该问题的对偶问题为

$$\min w = 8y_1 + 12y_2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \geq 2 & \text{①} \\ 2y_2 \geq 1 & \text{②} \\ y_1 + y_2 \geq 5 & \text{③} \\ y_1 + 2y_2 \geq 6 & \text{④} \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

由互补松弛性: 若 $\hat{X}, \hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解, 那么 $\hat{Y}X_s = 0$ 和 $Y_s \hat{X} = 0$, 当且仅当 $\hat{X}$ 与 $\hat{Y}$ 为最优解.

设 $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^T$ 为原问题的最优解.

$X_s = (x_5, x_6)^T$, 其中 x_5, x_6 为原问题约束条件的松弛变量. 而

$Y^* = (y_1^*, y_2^*) = (4, 1)$ 为对偶问题的最优解.

$Y_s = (y_3, y_4, y_5, y_6)$, 其中 y_3, y_4, y_5, y_6 为与①②③④相对应的松弛变量.

$$\therefore Y^* X_s = 0 \quad \text{且} \quad Y_s X^* = 0$$

$$\therefore y_1^* = 4, \quad y_2^* = 1$$

$$\therefore \text{③④为等式, 故 } y_5 = y_6 = 0$$

$$\text{①②为不等式, 故 } y_3 \neq 0, y_4 \neq 0$$

$$\text{由 } Y_s X^* = 0 \text{ 即 } y_3 x_1^* + y_4 x_2^* + y_5 x_3^* + y_6 x_4^* = 0$$

$$\text{得 } x_1^* = x_2^* = 0$$

$$\therefore y_1, y_2 > 0$$

$$\text{由 } Y^* X_s = 0 \text{ 即 } y_1^* x_5^* + y_2^* x_6^* = 0$$

$$\text{得 } x_5 = x_6 = 0$$

即原问题的约束条件应取等号.

$$\therefore \begin{cases} x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{原问题的最优解为 } X^* = (0, 0, 4, 4)^T$$

$$\text{目标函数最优值 } \max z = 2 \times 0 + 1 \times 0 + 5 \times 4 + 6 \times 4 = 44$$

3.9 试用对偶单纯形法求解下列线性规划问题.

$$\begin{aligned}
 (1) \min z &= x_1 + x_2 & (2) \min z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\
 \begin{cases} 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 7x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{cases} & & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &\geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 &\geq 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 &\geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

【解】(1) 令 $z' = -z$, 将上述问题转化为如下形式

$$\begin{aligned}
 \max z' &= -x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
 \text{s. t. } &\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - 7x_2 + x_4 = -7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对于此线性规划问题, 列出初始单纯形表, 利用对偶单纯形法求解. 见表 3-4.

表 3-4

c_j			-1	-1	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-4	-2	-1	1	0
0	x_4	-7	-1	$[-7]$	0	1
$-z'$		0	-1	-1	0	0
0	x_3	-3	$[-\frac{13}{7}]$	0	1	$-\frac{1}{7}$
-1	x_2	1	$\frac{1}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$
$-z'$		1	$-\frac{6}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$
-1	x_1	$\frac{21}{13}$	1	0	$-\frac{7}{13}$	$\frac{1}{13}$
-1	x_2	$\frac{10}{13}$	0	1	$\frac{1}{13}$	$-\frac{2}{13}$
$-z'$		$\frac{31}{13}$	0	0	$-\frac{6}{13}$	$-\frac{1}{13}$

由表 3-4 可得原线性规划问题的最优解

$$X^* = \left(\frac{21}{13}, \frac{10}{13}, 0, 0 \right)^T$$

目标函数最优值 $\min z = -\max z' = \frac{31}{13}$

(2) 令 $z' = -z$, 将上述问题转化为如下形式:

$$\begin{aligned}
 \max z' &= -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \\
 \text{s. t. } &\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_6 = -2 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 + x_7 = -15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对于此线性规划问题, 列出初始单纯形表, 利用对偶单纯形法进行求解, 见表 3-5.

表 3-5

c_j			-3	-2	-1	-4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	-2	-4	-5	-1	1	0	0
0	x_6	-2	-3	1	-7	2	0	1	0
0	x_7	-15	$[-5]$	-2	-1	-6	0	0	1
$-z'$		0	-3	-2	-1	-4	0	0	0
0	x_5	6	0	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{23}{5}$	$\frac{7}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$
0	x_6	7	0	$\frac{11}{5}$	$-\frac{32}{5}$	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$

续表 3-5

-3	x_1	3	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$
$-z'$		9	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$

由表 3-5 可得原线性规划问题的最优解 $X^* = (3, 0, 0, 0, 6, 7, 0)$

目标函数最优值 $\min z = -\max z' = 9$

3.10 现有线性规划问题

$$\max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

①

②

先用单纯形法求出最优解, 然后分析在下列各种条件下, 最优解分别有什么变化?

- (1) 约束条件①的右端常数由 20 变为 30;
- (2) 约束条件②的右端常数由 90 变为 70;
- (3) 目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8;
- (4) 约束中 x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;
- (5) 增加一个约束条件③ $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$;
- (6) 将原约束条件②改变为 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$.

【解】 将原问题划为标准型式得

$$\max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 90 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

对于此线性规划问题, 用单纯形法进行求解, 见表 3-6.

表 3-6

c_j			-5	5	13	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	-1	1	[3]	1	0	$\frac{20}{3}$
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9
$-z$		0	-5	5	13	0	0	
13	x_3	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$[\frac{1}{3}]$	1	$\frac{1}{3}$	0	20
0	x_5	$\frac{70}{3}$	$\frac{46}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	1	35
$-z$		$-\frac{260}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{13}{3}$	0	
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	
$-z$		-100	0	0	-2	-5	0	

由表 3-6 可得原线性规划问题的最优解为 $X^* = (0, 20, 0, 0, 10)^T$

目标函数的最优值 $\max z = 100$

$\therefore$ 非基变量 x_1 的检验数 $\sigma_1 = 0, \therefore$ 原线性规划问题有无穷多最优解.

(1) 约束条件①的右端常数由 20 变为 30, 则

$$\Delta b' = B^{-1} \Delta b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b' = b + \Delta b' = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix}$$

在表 3-6 的基础上, 列出单纯形表, 对于此问题, 由于检验数均为非正, 而初始解为非可行解, 所以用对偶单纯形法进行求解. 见表 3-7.

表 3-7

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	30	-1	1	3	1	0
0	x_5	-30	16	0	$[-2]$	-4	1
$-z$		-150	0	0	-2	-5	0
5	x_2	-15	23	1	0	$[-5]$	$\frac{3}{2}$
13	x_3	15	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-z$		-120	-16	0	0	-1	-1
0	x_4	3	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{10}$
13	x_3	9	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$
$-z$		-117	$-\frac{103}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{13}{10}$

由表 3-7 可得线性规划问题的最优解发生了变化, 其最优解为 $X^* = (0, 0, 9, 3, 0)^T$

目标函数的最优值为 $\max z = 117$

(2) 约束条件②的右端常数由 90 变为 70

$$\Delta b' = B^{-1} \Delta b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore b' = b + \Delta b' = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

在表 3-6 的基础上列出单纯形表, 对于此问题, 由于检验数均为非正, 而初始解为非可行解, 所以用对偶单纯形法进行求解, 见表 3-8.

表 3-8

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	-10	16	0	$[-2]$	-4	1
$-z$		-100	0	0	-2	-5	0

续表 3-8

5	x_2	5	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$
13	x_3	5	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-z$		-90	-16	0	0	-1	-1

由表 3-8 可得线性规划问题的最优解发生了变化,其最优解为 $X^* = (0, 5, 5, 0, 0)^T$

目标函数的最优值为 $\max z = 90$

(3) 目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8

由表 3-6 可知: x_3 为非基变量, 此时其检验数

$$\sigma'_3 = 8 - [5 \times 3 + 0 \times (-2)] = -7 < 0$$

所以线性规划问题的最优解不变.

(4) x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

由表 3-6 知: x_1 为非基变量, 此时其检验数

$$\begin{aligned} \therefore \sigma'_1 &= C_1 - C_B B^{-1} P_1 = -5 - (5, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= -5 - (5, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 < 0 \end{aligned}$$

所以线性规划问题的最优解不变.

(5) 增加一个约束条件 ③ $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$

在 ③ 式加入松弛变量 x_6 得 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 50$

在表 3-6 的基础上加入上述约束条件后用对偶单纯形表进行求解, 见表 3-9.

表 3-9

c_j			-5	5	13	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	50	2	3	5	0	0	1
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	-10	5	0	[-4]	-3	0	1
$-z$		-100	0	0	-2	-5	0	0
5	x_2	$\frac{25}{2}$	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
0	x_5	15	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
13	x_3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$
$-z$		-95	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

由表 3-9 可得线性规划问题的最优解发生了变化,其最优解

$$X^* = \left(0, \frac{25}{2}, \frac{5}{2}, 0, 15, 0\right)^T$$

目标函数的最优值为 $\max z = 95$

(6) 将原约束条件②改为 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$

$$P'_1 = B^{-1}P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$P'_2 = B^{-1}P'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P_3, P_4, P_5 并未发生变化

$$b'' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sigma'_1 = -5 - [5 \times (-1) + 0 \times 14] = 0$$

$$\sigma'_2 = 5 - [5 \times 1 + 0 \times 1] = 0$$

$\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ 并未发生变化, 故线性规划问题的最优解不发生变化。

3.11 已知某工厂计划生产 I, II, III 三种产品, 各产品需要在 A, B, C 设备上加工, 有关数据见表 3-10。

表 3-10

	I	II	III	设备有效台时(每月)
A	8	2	10	300
B	10	5	8	400
C	2	13	10	420
单位产品利润(千元)	3	2	2.9	

试回答: (1) 如何充分发挥设备能力, 使生产盈利最大?

(2) 若为了增加产量, 可借用别的工厂的设备 B, 每月可借用 60 台时, 租金为 1.8 万元, 问借用 B 设备是否合算?

(3) 若另有两种新产品 IV, V, 其中 IV 需用设备 A-12 台时; B-5 台时; C-10 台时, 单位产品盈利 2.1 千元; 新产品 V 需用设备 A-4 台时; B-4 台时; C-12 台时, 单位产品盈利 1.87 千元。如 A, B, C 设备台时不增加, 分别回答这两种新产品投产在经济上是否合算?

(4) 对产品工艺重新进行设计, 改进结构。改进后生产每件产品 I, 需用设备 A-9 台时, 设备 B-12 台时, 设备 C-4 台时, 单位产品盈利 4.5 千元, 问这对原计划有何影响?

【解】 (1) 设产品 I、II、III 的产量分别为 x_1, x_2, x_3 , 由题目所给的数据, 可以得到以下的数学模型:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

将上述问题转化为标准型式, 得

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 300 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_5 = 400 \\ 2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + x_6 = 420 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

对于此线性规划问题,用单纯形法求解,见表 3-11.

表 3-11

c_j			3	2	2.9	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	300	[8]	2	10	1	0	0	$\frac{75}{2}$
0	x_5	400	10	5	8	0	1	0	40
0	x_6	420	2	13	10	0	0	1	210
$-z$		0	3	2	2.9	0	0	0	
3	x_1	$\frac{75}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	150
0	x_5	25	0	$\left[\frac{5}{2}\right]$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	10
0	x_6	345	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{15}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{138}{5}$
$-z$		$-\frac{225}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{17}{20}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	
3	x_1	35	1	0	$\frac{17}{10}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{350}{17}$
2	x_2	10	0	1	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0	—
0	x_6	220	0	0	[30]	6	-5	1	$\frac{22}{3}$
$-z$		-125	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	
3	x_1	$\frac{338}{15}$	1	0	0	$-\frac{9}{100}$	$\frac{11}{60}$	$-\frac{17}{300}$	
2	x_2	$\frac{116}{5}$	0	1	0	$-\frac{7}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{50}$	
2.9	x_3	$\frac{22}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	
$-z$		$-\frac{2\,029}{15}$	0	0	0	$-\frac{3}{100}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{7}{150}$	

由表 3-11 可得:

$$\text{原线性规划问题的最优解 } X^* = \left(\frac{338}{15}, \frac{116}{5}, \frac{22}{3}, 0, 0, 0 \right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \max z = \frac{2\,029}{15}$$

(2) 由表 3-11 可知:设备 B 的影子价格为 $\frac{4}{15}$ (千元/台时)

$$\text{而借用设备的租金为: } \frac{18 \text{ 千元}}{60 \text{ 台时}} = 0.3 \text{ (千元/台时)} > \frac{4}{15} \text{ (千元/台时)}$$

所以借用 B 设备不合算.

(3) 设 IV 和 V 生产的产量分别为 x_7, x_8 , 其系数列向量分别为

$$P_7 = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad P_8 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

则其各自在最终单纯形表对应的列向量分别为

$$P'_7 = B^{-1}P_7 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{73}{100} \\ -\frac{29}{50} \\ \frac{19}{10} \end{pmatrix}$$

其检验数为

$$\sigma_7 = 2.1 - \left[2 \times \left(-\frac{73}{100} \right) + 2 \times \left(-\frac{29}{50} \right) + 2.9 \times \frac{19}{10} \right] = -0.06 < 0$$

所以生产产品 IV 不合算.

$$P'_8 = B^{-1}P_8 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{75} \\ \frac{14}{25} \\ \frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

其检验数为

$$\sigma_8 = 1.87 - \left[3 \times \left(-\frac{23}{75} \right) + 2 \times \frac{14}{25} + 2.9 \times \frac{8}{15} \right] = \frac{37}{300} > 0$$

所以生产产品 V 合算.

在表 3-11 的基础上加入一列列出初始单纯形表, 用单纯形法进行迭代, 见表 3-12.

表 3-12

c_j			3	2	2.9	0	0	0	1.87	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
3	x_1	$\frac{338}{15}$	1	0	0	$-\frac{9}{100}$	$\frac{11}{60}$	$-\frac{17}{300}$	$-\frac{23}{75}$	—
2	x_2	$\frac{116}{5}$	0	1	0	$-\frac{7}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{290}{7}$
2.9	x_3	$\frac{22}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\left[\frac{8}{15} \right]$	$\frac{55}{4}$
$-z$		$-\frac{2029}{15}$	0	0	0	$-\frac{3}{100}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{7}{150}$	$\frac{37}{100}$	
3	x_1	$\frac{107}{4}$	1	0	$\frac{23}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{7}{80}$	$-\frac{3}{80}$	0	
2	x_2	$\frac{31}{2}$	0	1	$-\frac{21}{20}$	$-\frac{7}{20}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{1}{40}$	0	
1.87	x_8	$\frac{55}{4}$	0	0	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1	

$-z$	$-\frac{10\,957}{80}$	0	0	$-\frac{37}{160}$	$-\frac{61}{800}$	$-\frac{73}{320}$	$-\frac{87}{1\,600}$	0	
------	-----------------------	---	---	-------------------	-------------------	-------------------	----------------------	---	--

由表 3-12 可得:

线性规划问题的最优解为 $X^* = \left(\frac{107}{4}, \frac{31}{2}, 0, 0, 0, 7, \frac{55}{4} \right)^T$

目标函数的最优值 $\max z = \frac{10\,957}{80}$

(4) 改进后

$$C'_1 = 4.5, \quad P'_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

此时其检验数

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= C'_1 - C_B B^{-1} P'_1 \\ &= 4.5 - (3, 2, 2.9) \begin{pmatrix} -\frac{9}{100} & \frac{11}{60} & -\frac{17}{300} \\ -\frac{7}{50} & \frac{1}{10} & \frac{3}{50} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4.5 - \left(\frac{3}{100}, \frac{4}{15}, \frac{7}{150} \right) \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{253}{300} > 0 \end{aligned}$$

所以改进技术后能够带来更多的经济效益.

3.12 分析下列参数规划中当 t 变化时最优解的变化情况.

$$(1) \max z(t) = (3-6t)x_1 + (2-2t)x_2 + (5-5t)x_3 \quad (t \geq 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \max z(t) = (7+2t)x_1 + (12+t)x_2 + (10-t)x_3 \quad (t \geq 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \max z(t) = 2x_1 + x_2 \quad (0 \leq t \leq 25)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 10+2t \\ x_1 + x_2 \leq 25-t \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \max z(t) = 21x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 15x_4 \quad (0 \leq t \leq 59)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 30+t \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 6x_4 \leq 78-t \\ 9x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 9x_4 \leq 135-2t \\ x_j \geq 0 \quad j=1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

【解】 (1) 将上述问题化为标准型式:

$$\begin{aligned} \max z(t) &= (3-6t)x_1 + (2-2t)x_2 + (5-5t)x_3 \\ &\quad + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 = 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 = 420 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

令 $t=0$, 用单纯形法进行求解, 见表 3-13.

表 3-13

c_j			3	2	5	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	430
0	x_5	460	3	0	[2]	0	1	0	230
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	—
$-z$		0	3	2	5	0	0	0	
0	x_4	200	$-\frac{1}{2}$	[2]	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	100
5	x_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	—
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	105
$-z$		-1 150	$-\frac{9}{2}$	2	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	
2	x_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	
5	x_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	
0	x_6	20	2	0	0	-2	1	1	
$-z$		-1 350	-4	0	0	-1	-2	0	

下面将 C 的变化直接反映到最终表中,见表 3-14.

表 3-14

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	100	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	—
$5-5t$	x_3	230	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	460
0	x_6	20	2	0	0	-2	[1]	1	20
$-z$		$1\ 350t$ $-1\ 350$	$t-4$	0	0	$t-1$	$2t-2$	0	

t 开始增大,当 $t>1$ 时,首先出现 $\sigma_4, \sigma_5>0$

$\therefore$ 当 $0\leq t\leq 1$ 时得最优解为 $X^*=(0,100,230,0,0,20)^T$

目标函数的最优值为 $\max z(t)=1\ 350(t-1)\quad (0\leq t\leq 1)$

$t=1$ 为第一临界点.

当 $t>1$ 时, $\sigma_4>0, \sigma_5>0$ 且 $\sigma_5>\sigma_4$,故 x_5 为换入变量,由 θ 规则确定 x_6 为换出变量.

用单纯形法进行迭代,得到表 3-15.

表 3-15

c_j			$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$2-2t$	x_2	105	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	—
$5-5t$	x_3	220	$\frac{1}{2}$	0	1	[1]	0	$-\frac{1}{2}$	220
0	x_5	20	2	0	0	-2	1	1	—
$-z$		$1\ 310t$ $-1\ 310$	$-3t$	0	0	$5t-5$	0	$2-2t$	
$2-2t$	x_2	105	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\left[\frac{1}{4}\right]$	420
0	x_4	220	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	—
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	—
$-z$		$210t$ -210	$\frac{5}{2}$ $-\frac{11}{2}t$	0	$5-5t$	0	0	$\frac{1}{2}t$ $-\frac{1}{2}$	
0	x_6	420	1	4	0	0	0	1	
0	x_4	430	1	2	1	1	0	0	
0	x_5	460	3	0	2	0	1	0	
$-z$		0	$3-6t$	$2-2t$	$5-5t$	0	0	0	

由表 3-15 可得:

当 $t > 1$ 时得最优解为 $X^* = (0, 0, 0, 430, 460, 420)^T$

目标函数的最优值为 $\max z(t) = 0 \quad (t > 1)$

(2) 将上述问题化为标准型式, 得:

$$\max z(t) = (7+2t)x_1 + (12+t)x_2 + (10-t)x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (t \geq 0)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

令 $t=0$, 用单纯形法求解, 见表 3-16.

表 3-16

c_j			7	12	10	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	1	1	1	1	0	20
0	x_5	30	2	[2]	1	0	1	15
$-z$		0	7	12	10	0	0	
0	x_4	5	0	0	$\left[\frac{1}{2}\right]$	1	$-\frac{1}{2}$	10

续表 3-16

12	x_2	15	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	30
$-z$		-180	-5	0	$\frac{1}{4}$	0	-6	
10	x_3	10	0	0	1	2	-1	
12	x_2	10	1	1	0	-1	1	
$-z$		-220	-5	0	0	-8	-2	

将 C 的变化直接反映到最终表中,见表 3-17.

表 3-17

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$10-t$	x_3	10	0	0	1	[2]	-1	5
$12+t$	x_2	10	1	1	0	-1	1	—
$-z$		-220	$t-5$	0	0	$3t-8$	$-2-2t$	

t 开始增大,当 $t > \frac{8}{3}$ 时,首先出现 $\sigma_4 > 0$

故当 $0 \leq t \leq \frac{8}{3}$ 时,得最优解 $X^* = (0, 10, 10, 0)^T$

目标函数的最优值为 $\max z(t) = 220 \quad (0 \leq t \leq 8/3)$

$t = 8/3$ 为第一临界点.

当 $8/3 < t < 5$ 时, $\sigma_4 > 0$, x_4 作为换入变量,由 θ 规则确定 x_3 为换出变量,用单纯形法进行迭代,得到表 3-18.

表 3-18

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	—
$12+t$	x_2	15	[1]	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	15
$-z$		$-180-15t$	$t-5$	0	$4-\frac{3}{2}t$	0	$-6-\frac{1}{2}t$	

由表 3-18 可得:

t 继续增大,当 $t > 5$ 时,首先出现 $\sigma_1 > 0$

故当 $\frac{8}{3} < t \leq 5$ 时得最优解为 $X^* = (0, 15, 0, 5)^T$

目标函数的最优值 $\max z(t) = 180 + 15t \quad \left(\frac{8}{3} < t \leq 5\right)$

$t = 5$ 为第二临界点.

当 $t > 5$ 时, $\sigma_1 > 0$, x_1 作为换入变量,由 θ 规则确定 x_2 作为换出变量,用单纯形法进行迭代,得到表 3-19.

表 3-19

c_j			$7+2t$	$12+t$	$10-t$	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	
$7+2t$	x_1	15	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
$-z$		$-105-30t$	0	$5-t$	$\frac{13}{2}-2t$	0	$-\frac{7}{2}-t$	

由表 3-19 可得:

当 t 继续增大时,所有检验数均为非正.

所以当 $t > 5$ 时,得最优解 $X^* = (15, 0, 0, 5)^T$

目标函数的最优值 $\max z(t) = 105 + 30t \quad (t > 5)$

(3) 将上述问题化为标准型式:

$$\max z(t) = 2x_1 + x_2 + 0 \times x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 \quad (0 \leq t \leq 25)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_3 = 10 + 2t \\ x_1 + x_2 + x_4 = 25 - t \\ x_2 + x_5 = 10 + 2t \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

令 $t=0$,用单纯形法求解上述线性规划问题,见表 3-20.

表 3-20

c_j			2	1	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	10	[1]	0	1	0	0	10
0	x_4	25	1	1	0	1	0	25
0	x_5	10	0	1	0	0	1	—
$-z$		0	2	1	0	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	—
0	x_4	15	0	1	-1	1	0	15
0	x_5	10	0	[1]	0	0	1	10
$-z$		-20	0	1	-2	0	0	
2	x_1	10	1	0	1	0	0	
0	x_4	5	0	0	-1	1	-1	
1	x_2	10	0	1	0	0	1	
$-z$		-30	0	0	-2	0	-1	

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Delta b' = B^{-1} \Delta b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$$

将上述计算结果反映到最终表 3-20 中, 得到 3-21.

表 3-21

c_j			2	1	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0	
0	x_4	$5-t$	0	0	-1	1	$[-1]$	
1	x_2	$10+2t$	0	1	0	0	1	
$-z$		$-6t-30$	0	0	-2	0	-1	

由表 3-21 可得:

t 开始增大, $t > 5$ 时, 首先出现 $b_2 < 0$

所以当 $0 \leq t \leq 5$ 时, 得最优解为 $X^* = (10+2t, 10+2t, 0, 5-t, 0)^T$

目标函数最优值为 $\max z(t) = 6t + 30 \quad (0 \leq t \leq 5)$

$t = 5$ 为第一临界点

当 $t > 5$ 时, $b_2 < 0$

所以 x_4 为换出变量, 由 θ 规则 x_5 为换入变量, 用对偶单纯形法进行迭代, 得到表 3-22.

表 3-22

c_j			2	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$10+2t$	1	0	1	0	0
0	x_5	$t-5$	0	0	1	-1	1
1	x_2	$15+t$	0	1	-1	1	0
$-z$		$-35-5t$	0	0	-1	-1	0

当 $t > 5$ 时, 问题已得到最优解 $X^* = (10+2t, 15+t, 0, 0, t-5)^T$

目标函数的最优值 $\max z(t) = 35+5t \quad (5 < t \leq 25)$

(4) 将上述问题化为标准型式得:

$$\max z(t) = 21x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 15x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \quad (0 \leq t \leq 50)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + x_5 = 30+t \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 6x_4 + x_6 = 78-t \\ 9x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 9x_4 + x_7 = 135-2t \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

令 $t = 0$, 用单纯形法进行求解, 见表 3-23.

表 3-23

c_j			21	12	18	15	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	30	[6]	3	6	3	1	0	0	5

续表 3-23

0	x_6	78	6	-3	12	6	0	1	0	13
0	x_7	135	9	3	-6	9	0	0	1	15
$-z$		0	21	12	18	15	0	0	0	
21	x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	1	$\left[\frac{1}{2}\right]$	$\frac{1}{6}$	0	0	10
0	x_6	48	0	-6	6	3	-1	1	0	16
0	x_7	90	0	$-\frac{3}{2}$	-15	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	20
$-z$		-105	0	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{9}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	0	
15	x_4	10	10	2	1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	0
0	x_6	18	-6	-9	0	0	-2	1	0	
0	x_7	45	-9	-6	-24	0	-3	0	1	
$-z$		-150	-9	-3	-12	0	-5	0	0	

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Delta \mathbf{b}' = \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \\ -3t \\ -5t \end{pmatrix}$$

将上述计算结果反映到最终表 3-23 中,得到表 3-24.

表 3-24

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$10 + \frac{1}{3}t$	2	1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	0
0	x_6	$18 - 3t$	6	$[-9]$	0	0	-2	1	0
0	x_7	$45 - 5t$	-9	-6	-24	0	-3	0	1
$-z$		$-150 - 5t$	-9	-3	-12	0	-5	0	0

由表 3-24 可得:

t 开始增大,当 $t < 6$ 时,首先出现 $b_2 < 0$

所以当 $0 \leq t \leq 6$ 时,得最优解 $X^* = \left(0, 0, 0, 10 + \frac{1}{3}t, 0, 18 - 3t, 45 - 5t\right)^T$

目标函数的最优值 $\max z(t) = 150 + 5t \quad (0 \leq t \leq 6)$

$t = 6$ 为第一临界点

当 $t > 6$ 时, $b_2 < 0$

所以 x_6 为换出变量, 由 θ 规则确定 x_2 为换入变量.

用对偶单纯形法进行迭代, 得到表 3-25.

表 3-25

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	12	$\frac{4}{3}$	0	2	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
12	x_2	$\frac{1}{3}t-2$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0
0	x_7	$33-3t$	-5	0	$[-24]$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
$-z$		$-156-4t$	-7	0	-12	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

由表 3-25 可得:

t 继续增大, 当 $t > 11$ 时, 首先出现 $b_3 < 0$

所以当 $6 < t \leq 11$ 时, 得最优解 $X^* = \left(0, \frac{1}{3}t-2, 0, 12, 0, 0, 33-3t\right)^T$

目标函数最优值 $\max z(t) = 156+4t$ ($6 < t \leq 11$)

$t = 11$ 为第二临界点

当 $t > 11$ 时, $b_3 < 0$

所以 x_7 为换出变量

由 θ 规则确定 x_3 为换入变量, 用对偶单纯形法进行迭代, 得到表 3-26.

表 3-26

c_j			21	12	18	15	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
15	x_4	$\frac{59}{4}-\frac{t}{4}$	$\frac{11}{12}$	0	0	1	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	x_2	$\frac{1}{3}t-2$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0
18	x_3	$\frac{1}{8}(t-11)$	$\frac{5}{24}$	0	1	0	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{24}$
$-z$		$-\frac{345+5t}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

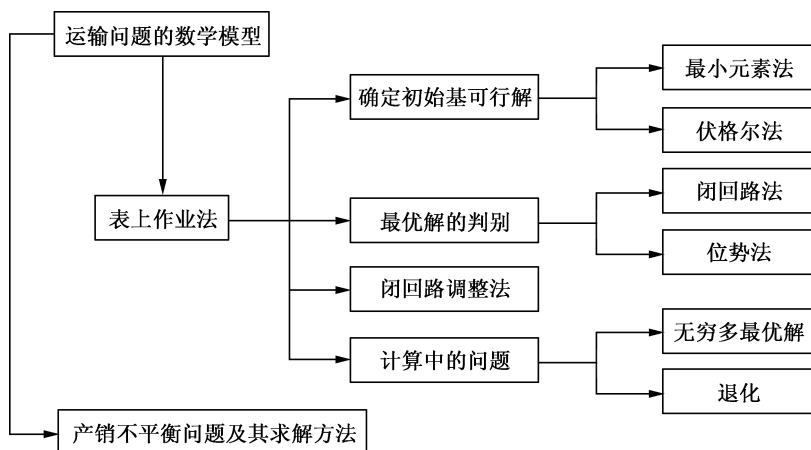
由表 3-26 可得:

在 $t \leq 59$ 的条件下已得到最优解 $X^* = \left(0, \frac{1}{3}t-2, \frac{t}{8}-\frac{11}{8}, \frac{59}{4}-\frac{t}{4}, 0, 0, 0\right)^T$

目标函数的最优值 $\max z(t) = \frac{5}{2}t + \frac{345}{2}$ ($11 < t \leq 59$)

第4章 运输问题

知识结构图



学习要求

1. 了解运输问题的特点.
2. 掌握表上作业法及其在产销平衡运输问题求解中的应用.
3. 掌握产销不平衡运输问题的求解方法.

重点、难点解答

1. 产销平衡即总产量等于总需求量的运输问题,可直接采用表上作业法求其最优调运方案.求空格的检验数 λ_{ij} 通常有以下两种方法.

- (1) 用闭回路法求 λ_{ij} , 适合于小规模的运输问题.
- (2) 用位势法求 λ_{ij} , 适合于大规模的运输问题.

2. 产销不平衡运输问题求解,对于总产量不等于总需求量的运输问题,不能直接采用表上作业法求最优调运方案,必须转化为产销平衡运输问题,然后采用表上作业法求最优调运方案.

(1) 产大于销问题,设置一个假想销地 B_{n+1} ,接受多余的产量 $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$,实际上没有发生运输,即不应该产生费用,因此运价为 0,这样,既转化为产销平衡运输问题,又不破坏原问题的性质.

(2) 销大于产问题,设置一个假想产地 A_{m+1} ,用来满足多余的销量 $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$,实际上没有发生运输,即不应该产生费用,因此运价为 0.既转化为产销平衡问题又不破坏问题的性质.

课后习题全解

- 4.1 判断表 4-1 和表 4-2 中给出的调运方案能否作为用表上作业法求解时的初始解?为什么?

表 4-1

产地 \ 销地	1	2	3	4	产量
1	0	15			15
2			15	10	25
3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 4-2

产地 \ 销地	1	2	3	4	5	产量
1	150			250		400
2		200	300			500
3			250		50	300
4	90	210				300
5				80	20	100
销量	240	410	550	330	70	

【解】 (1) 表 4-1 中, 有 5 个数字格, 而作为初始解, 应有 $m+n-1=3+4-1=6$ 个数字格, 所以表 4-1 的调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

(2) 表 4-2 中, 有 10 个数字格, 而作为初始解, 应有 $m+n-1=5+5-1=9$ 个数字格, 所以表 4-2 的调运方案不能作为用表上作业法求解时的初始解。

4.2 判断下列说法是否正确, 并说明理由

(1) 在运输问题中, 只要任意给出一组含 $(m+n+1)$ 个非零的 $\{x_{ij}\}$, 且满足 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$, $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, 就可以作为一个初始基可行解;

(2) 表上作业法实质上就是求解运输问题的单纯形法;

(3) 如果运输问题单位运价表的某一行(或某一列)元素分别加上一个常数 k , 最优调运方案将不发生变化;

(4) 运输问题单位运价表的全部元素乘上一个常数 $k(k>0)$, 最优调运方案将不发生变化。

【解】 (1) ×

(2) ✓

(3) × (不平衡运输问题)

(4) ✓

4.3 用表上作业法和伏格尔(Vogel)法求表 4-3 和表 4-4 中给出的运输问题的最优解和近似最优解(表中数字 M 为任意大正数)。

表 4-3

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	20	5	9	10	5
2	2	10	8	30	6	6
3	1	20	7	10	4	2

续表 4-3

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
4	8	6	3	7	5	9
销量	4	4	6	2	4	

表 4-4

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	18	29	13	22	100
2	13	M	21	14	16	120
3	0	6	11	3	M	140
4	9	11	23	18	19	80
5	24	28	36	30	34	60
销量	100	120	100	60	80	

【解】(1) 此问题是一个产销不平衡问题,由表 4-3 知,产大于销,所以增加一个假想销地己,令其单位运价为 0,其销量为 $(5+6+2+9)-(4+4+6+2+4)=2$

这样便得到产销平衡表和单位运价表,见表 4-5.

表 4-5

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	6
3	1	20	7	10	4	0	2
4	8	6	3	7	5	0	9
销量	4	4	6	2	4	2	

对于此问题,用伏格尔法求初始解.

① 在表 4-5 中分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,见表 4-6.

表 4-6

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	行差额
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	2
3	1	20	7	10	4	0	1
4	8	6	3	7	5	0	3
列差额	1	4	2	2	1	0	

② 从行差额或列差额中选出最大者,选择它所在的行或列中的最小元素,在表 4-6 中产地 1 所在的行为最大差额行,产地 1 所在的行的最小元素为 0,由此可确定产地 1 的产品先供应己的需要,得到

表 4-7, 同时将运价表中的已列数字划去, 得到表 4-7.

表 4-7

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1						2	5
2							6
3							2
4							9
销量	4	4	6	2	4	2	

表 4-8

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	6
3	1	20	7	10	4	0	2
4	8	6	3	7	5	0	9
销量	4	4	6	2	4	2	

③ 对表 4-8 中未划去的元素, 分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额, 填入该表的最右列和最下行, 重复地做①②, 直到求得初始解为止, 用此种方法求出表 4-5 的初始解, 见表 4-9.

表 4-9

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			3			2	5
2	4				2		6
3					2		2
4		4	3	2	0		9
销量	4	4	6	2	4	2	

下面用位势法进行检验:

① 在对应表 4-9 的数字格处填入单位运价, 并增加一行一列, 在列中填入 $u_i (i=1, 2, 3, 4)$, 在行中填入 $v_j (j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 先令 $u_1=0$, 由 $u_i+v_j=c_{ij} (i, j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j , 得到表 4-10.

表 4-10

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1			5			0	0
2	2				6		-1
3					4		-3
4		6	3	7	5		-2
v_j	3	8	5	9	7	0	

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ($i, j \in N$) 计算所有空格的检验数并在每个格的右上角填入单位运价, 得到表 4-11.

表 4-11

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	7 10	12 20	5	0 9	3 10	0	0
2	2	3 10	4 8	22 30	6	1 0	-1
3	1 1	15 20	5 7	4 10	4	3 0	-3
4	7 8	6	3	7	5	2 0	-2
v_j	3	8	5	9	7	0	

由表 4-11 可以看出, 所有的非基变量的检验数 $\sigma_{ij} \geq 0$

∴ 此问题已达到最优解

又∵ 非基变量的检验数 $\sigma_{14} = 0$

∴ 此问题有无穷多最优解.

此时的总运费

$$\min z = 4 \times 2 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 3 + 2 \times 7 + 2 \times 4 + 2 \times 6 = 90$$

(2) 该问题是一个产销不平衡问题. 由表 4-4 知, 产大于销, 所以增加一个假想销地己, 令其运价为 0, 其销量为

$$(100 + 120 + 140 + 80 + 60) - (100 + 120 + 100 + 60 + 80) = 40$$

这样便得到产销平衡表和单位运价表, 见表 4-12.

表 4-12

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	10	18	29	13	22	0	100
2	13	M	21	14	16	0	120
3	0	6	11	3	M	0	140
4	9	11	23	18	19	0	80
5	24	28	36	30	34	0	60
销量	100	120	100	60	80	40	

对于此问题, 用伏格尔法求初始解.

① 在表 4-12 中分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额, 填入该表的最右列和最下行, 见表 4-13.

表 4-13

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	行差额
1	10	18	29	13	22	0	10
2	13	M	21	14	16	0	13

续表 4-13

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	行差额
3	0	6	11	3	<i>M</i>	0	0
4	9	11	23	18	19	0	9
5	24	28	36	30	34	0	24
列差额	9	5	10	10	3	0	

② 从行差额或列差额中选出最大者,选择它所在的行或列中的最小元素,表 4-13 中产地 5 所在的行为最大差额行,其所在的行的最小元素为 0,由此可确定产地 5 的产品先供应己的需要,得表 4-14,同时将运价表中的己列数字划去,得到表 4-15.

表 4-14

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1							100
2							120
3							140
4							80
5						40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

表 4-15

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	10	18	29	13	22	0	100
2	13	<i>M</i>	21	14	16	0	120
3	0	6	11	3	<i>M</i>	0	140
4	9	11	23	18	19	0	80
5	24	28	36	30	34	0	60
销量	100	120	100	60	80	40	

③ 对表 4-15 中未划去的元素,分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,重复地做①②,直到求得初始解为止,用此种方法求出表 4-12 的初始解见表 4-16.

表 4-16

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	60	40					100
2	20			20	80		120
3			100	40			140
4		80					80
5	20					40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

下面用位势法进行检验。

① 在对应表 4-16 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,4,5)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5,6)$ 先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-17。

表 4-17

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18					0
2	13			14	16		3
3			11	3			-8
4		11					-7
5	24					0	14
v_j	10	18	19	11	13	-14	

② $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-18。

表 4-18

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18	10	2	9	14	0
2	13	M	-1	14	16	11	3
3	-2	-4	11	3	M	22	-8
4	9	11	11	14	13	21	-7
5	24	-4	3	5	7		14
v_j	10	18	19	11	1	-14	

表 4-18 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进。

由表 4-18 可得:(3,乙)格的检验数 $\sigma_{32}=-4$ 为负的最小,故(3,乙)为调入格,以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-19。

表 4-19

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	60 ⁽⁺¹⁾	40(-1)					100
2	20 ⁽⁻¹⁾			20(+1)	80		120
3		(+1)	100	40(-1)			140
4		80					80

续表 4-19

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
5	20					40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

(3, 乙) 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者, 即

$$\theta = \min\{20, 40, 40\} = 20$$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值, 得到调整方案见表 4-20.

表 4-20

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	80	20					100
2				40	80		120
3		20	100	20			140
4		80					80
5	20						60
销量	100	120	100	60	80	40	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-20 中的数字格处填入单位运价, 并增加一行一列, 在列中填入 $u_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 在行中填入 $v_j (j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 先令 $u_1=0$, 由 $u_i+v_j=c_{ij} (i, j \in B)$ 来确定 u_i, v_j , 得到表 4-21.

表 4-21

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18					0
2				14	16		-1
3		6	11	3			-12
4		11					-7
5	24					0	14
v_j	10	18	23	15	17	-14	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i, j \in N)$ 计算所有空格的检验数, 并在每个格的右上角填入单位运价, 得到表 4-22.

表 4-22

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18	29	13	22	0	0
2	13	M	21	14	16	0	-1
	4	M-17	-1			15	

续表 4-22

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
3	2 0	6	11	3	$M-5$ 1	26 0	-12
4	6 9	11	7 23	10 18	9 19	21 0	-7
5	24	-4 28	-1 36	1 30	3 34	0	14
v_j	10	18	23	15	17	-14	

表 4-22 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进。

由表 4-22 可得:(5,乙)格的检验数 $\sigma_{52} = -4$ 为负的最小,故(5,乙)格为调入格.以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-23.

表 4-23

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	80 (+1)	(-1) 20					100
2				40	80		120
3		20	100	20			140
4		80					80
5	20 (-1)	(+1)				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

(5,乙)格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者,即

$$\theta = \min \{20, 20\} = 20$$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值.由于此时出现退化情况,故在(1,乙)处填入一个 0,得到调整方案见表 4-24.

表 4-24

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	100	0					100
2				40	80		120
3		20	100	20			140
4		80					80
5		20				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

下面用位势法进行检验.

① 在对对应表 4-24 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3,4,5)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5,6)$,先令 $u_1 = 0$,由 $u_i + v_j = c_{ij} (i, j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-25.

表 4-25

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18					0
2				14	16		-1
3		6	11	3			-12
4		11					-7
5		28				0	10
v_j	10	18	23	15	17	-10	

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ($i, j \in N$) 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-26.

表 4-26

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18	6	-2	5	10	0
2	4	$M-17$	-1			11	-1
3	2	6			$M-5$	22	-12
4	6	11	7	10	9	17	-7
5	4	28	3	5	7		10
v_j	10	18	23	15	17	-10	

表 4-26 中还有负检验数,说明还未得到最优解.用闭回路调整法进行改进

由表 4-26 可得:(1,丁)格的检验数 $\sigma_{14} = -2$ 为负的最小,故(1,丁)为调入格。以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-27.

表 4-27

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	100	0 ⁽⁻¹⁾		(+1)			100
2				40	80		120
3		20 ⁽⁺¹⁾	100	20 ⁽⁻¹⁾			140
4		80					80
5		20				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

(1,丁)格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者,即

$$\theta = \min\{0, 20\} = 0$$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值,得到调整方案见表 4-28.

表 4-28

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	100			0			100
2				40	80		120
3		20	100	20			140
4		80					80
5		20				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

下面用位势法进行检验.

① 在对表 4-28 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3,4,5)$, 在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5,6)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u 和 v_j ,得到表 4-29.

表 4-29

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10			13			0
2				14	16		1
3		6	11	3			-10
4		11					-5
5		28				0	12
v_j	10	16	21	13	15	-12	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-30.

表 4-30

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18	29	13	22	0	0
2	13	M	21	14	16	0	1
3	0	6	11	3	M	0	-10
4	9	11	23	18	19	0	-5
5	24	28	36	30	34	0	12
v_j	10	16	21	13	15	-12	

表 4-30 还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进.

由表 4-30 可得:(2,丙)格的检验数 $\sigma_{23} = -1$ 为负的最小,故(2,丙)为调入格.以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-31.

表 4-31

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	100			0			100
2			(+1) 40 (-1)		80		120
3		20	(-1) 100 (-1)	20 (+1)			140
4		80					80
5		20				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

(2,丙)格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者,即

$$\theta = \min \{40, 100\} = 40$$

按照闭回路上的正负号加上或减此去值,得到调整方案见表 4-32.

表 4-32

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	100			0			100
2			40		80		120
3		20	60	60			140
4		80					80
5		20				40	60
销量	100	120	100	60	80	40	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-32 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3,4,5)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5,6)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-33.

表 4-33

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10			13			0
2			21		16		0
3		6	11	3			-10
4		11					-5
5		28				0	12
v_j	10	16	21	13	16	-12	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-34.

表 4-34

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10	18 2	29 8	13	22 6	0 12	0
2	13 3	M M-16	21	14 1	16	0 12	0
3	0	6	11	3	M M-6	0 22	-10
4	9 4	11	23 7	18 10	19 8	0 17	-5
5	24 2	28	36 3	30 5	34 6	0	12
v_j	10	16	21	13	16	-12	

由表 4-34 可以看出:所有的非基变量的检验数 $\sigma_{ij} \geq 0$

$\therefore$ 此问已达到最优解.

又 $\because$ 非基变量的检验数 $\sigma_{31} = 0$

$\therefore$ 此问题有无穷多最优解.

此时的总运费

$$\begin{aligned} \min z &= 10 \times 100 + 13 \times 0 + 21 \times 40 + 16 \times 80 + 6 \times 20 \\ &\quad + 11 \times 60 + 3 \times 60 + 11 \times 80 + 28 \times 20 + 0 \times 40 \\ &= 5\,520 \end{aligned}$$

4.4 已知运输问题的产销平衡表、单位运价表及最优调运方案分别见表 4-35 和 4-36,试回答下列问题。

表 4-35 产销平衡表及最优调运方案

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5		10	15
A_2	0	10	15		25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 4-36 单位运价表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	1	20	11
A_2	12	7	9	20
A_3	2	14	16	18

(1) 从 $A_2 \rightarrow B_3$ 的单位运价 c_{23} 在什么范围变化时,上述最优调运方案不变?

(2) $A_2 \rightarrow B_4$ 的单位运价 c_{24} 变为何值时,有无穷多最优调运方案.除表 4-35 中方案外,至少再写出其他两个.

【解】 (1) ① 在对应表 4-35 的数字格处(c_{22} 未知)填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-37.

表 4-37

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1		1		11	0
A_2	12	c_{22}	9		$c_{22}-1$
A_3	2				$c_{22}-11$
v_j	$13-c_{22}$	1	10	11	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价(c_{22} 未知),得到表 4-38.

表 4-38

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	$c_{22}-3$ 10	1	$c_{22}+10$ 20	11	0
A_2	12	c_{22}	9	$10-c_{22}$ 20	$c_{22}-1$
A_3	2	$24-c_{22}$ 14	17 16	$18-c_{22}$ 18	$c_{22}-11$
v_j	$13-c_{22}$	1	$10-c_{22}$	11	

要满足最优调运方案不变的条件,则所有非基变量的检验数都应非负.

$$\therefore \begin{cases} c_{22}-3 \geq 0 \\ c_{22}+10 \geq 0 \\ 10-c_{22} \geq 0 \\ 24-c_{22} \geq 0 \\ 18-c_{22} \geq 0 \end{cases}$$

解得: $3 \leq c_{22} \leq 10$

故单位运价 c_{22} 在 $[3, 10]$ 之间变化时,上述最优调运方案不变.

(2) ① 在对应表 4-35 的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-39.

表 4-39

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1		1		11	0
A_2	12	7	9		6
A_3	2				-4
v_j	6	1	3	11	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价(c_{24} 未

知), 得到表 4-40.

表 4-40

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 10	1	17 20	11	0
A_2	12	7	9	$c_{24}-17$ c_{24}	6
A_3	2	17 14	17 16	11 18	-4
v_j	6	1	3	11	

要满足有无穷多最优调运方案, 则至少有一个非基变量的检验数为 0.

由表 4-40 可得: $c_{24}-17=0$

$\therefore c_{24}=17$

故单位运价 c_{24} 变为 17 时, 该问题有无穷多调运方案. (A_2, B_4) 作为调入格, 以此格为出发点, 作一闭回路. 见表 4-41.

表 4-41

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5(+1)		10(-1)	15
A_2	0	10(-1)	15	(+1)	25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

(A_2, B_4) 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者即 $\theta=\min\{10, 10\}=10$, 按照闭回路上的正负号加上或减去此值, 由于此时出现退化情况, 故在 (A_1, B_4) 处填入一个 0, 得到调整方案见表 4-42. 或在 (A_2, B_2) 处填入一个 0, 得到调整方案见表 4-43.

表 4-42

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		15		0	15
A_2	0		15	10	25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 4-43

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		15			15
A_2	0	0	15	10	25

续表 4-43

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

4.5 某百货公司去外地采购 A、B、C、D 四种规格的服装,数量分别为 A——1 500 套,B——2 000 套,C——3 000 套,D——3 500 套.有三个城市可供应上述规格服务,供应数量为城市 I——2 500 套,II——2 500 套,III——5 000 套.由于这些城市的服装质量、运价为销售情况不一,预计售出后的利润(元/套)也不同,详见表 4-44.

表 4-44

产地 \ 销地	A	B	C	D
I	10	5	6	7
II	8	2	7	6
III	9	3	4	8

请帮助该公司确定一个预期盈利最大的采购方案.

【解】 ∵ 利润表中的最大利润为 10

∴ 令 $M=10$,用 M 减去利润表上的数字.

则此时原问题成为一个运输问题,产销平衡表及单位运价表见表 4-45.

表 4-45

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	0	5	4	3	2 500
II	2	8	3	4	2 500
III	1	7	6	2	5 000
销量	1 500	2 000	3 000	3 500	

对于此问题,用伏格尔法求初始解.

① 在表 4-45 中分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,见表 4-46.

表 4-46

产地 \ 销地	A	B	C	D	行差额
I	0	5	4	3	3
II	2	8	3	4	1
III	1	7	6	2	1
列差额	1	2	1	1	

② 从行差额或列差额中选出最大者,选择它所在的行或列中的最小元素,表 4-46 中产地 I 所在的行为最大差额行,其所在的行的最小元素为 0,由此可确定产地 I 的产品先供应 A 的需要,得表 4-47,同时将运价表中的 A 列数字划去,得到表 4-48.

表 4-47

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	1 500				2 500
II					2 500
III					5 000
销量	1 500	2 000	3 000	35 000	

表 4-48

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	0	5	4	3	2 500
II	2	8	3	4	2 500
III	1	7	6	2	5 000
销量	15 00	2 000	3 000	3 500	

③ 对表 4-48 中未划去的元素分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,重复地做①②,直到求得初始解为止.用此种方法求出表 4-36 的初始解,见表 4-49.

表 4-49

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	1 500	500	500		2 500
II			2 500		2 500
III		1 500		3 500	5 000
销量	1 500	2 000	3 000	3 500	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-49 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-50.

表 4-50

产地 \ 销地	A	B	C	D	u_i
I	0	5	4		0
II			3		-1
III		7		2	2
v_j	0	5	4	0	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-51.

表 4-51

产地 \ 销地	A	B	C	D	u_i
I	0	5	4	3	0
II	2	8	3	4	-1
III	1	7	6	2	2
v_j	0	5	4	0	

表 4-51 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进.

由表 4-51 可得:(III,A)格的检验数 $\sigma_{31} = -1$ 为负的最小,故(III,A)为调入格.以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-52.

表 4-52

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	1 500(-1)	500(+1)	500		2 500
II			2 500		2 500
III	(+1)	1 500(-1)		3 500	3 500
销量	1 500	2 000	3 000	3 500	

(III,A)格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者,即 $\theta = \min\{1\,500, 1\,500\} = 1\,500$,按照闭回路上的正负号加上或减去此值.由于此时出现退化情况,故在(I,A)处填入一个 0,得到调整方案见表 4-53.

表 4-53

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	0	2 000	500		2 500
II			2 500		2 500
III	1 500			3 500	5 000
销量	1 500	2 000	3 000	3 500	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-53 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,先令 $u_1 = 0$,由 $u_i + v_j = c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-54.

表 4-54

产地 \ 销地	A	B	C	D	u_i
I	0	5	4		0
II			3		-1
III	1			2	1

v_j	0	5	4	1	
-------	---	---	---	---	--

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ($i, j \in N$) 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-55.

表 4-55

销地 产地	A	B	C	D	u_i
I	0	5	4	3 2	0
II	2 3	8 4	3	4 4	-1
III	1	7 1	6 1	2	1
v_j	0	5	4	1	

由表 4-54 可以看出:所有非基变量的检验数 $\sigma_{ij} > 0$

$\therefore$ 此问题已达到最优解且为唯一最优解.

此时的总运费

$$\max z = 2\,000 \times 5 + 500 \times 4 + 2\,500 \times 3 + 1\,500 \times 1 + 3\,500 \times 2 = 28\,000 \text{ (元)}$$

$\therefore$ 原问题要求的盈利最大的采购方案见表 4-53.

$$\text{最大盈利为 } \max z = 10 \times (2\,500 + 2\,500 + 5\,000) - 28\,000 = 72\,000 \text{ (元)}$$

4.6 甲、乙、丙三个城市每年分别需要煤炭 320、250、350 万吨,由 A、B 两处煤矿负责供应.已知煤炭年供应量为 A——400 万吨, B——450 万吨.由煤矿至各城市的单位运价(万元/万吨)见表 4-56.

表 4-56

	甲	乙	丙
A	15	18	22
B	21	25	16

由于需大于供,经研究平衡决定,甲城市供应量可减少 0~30 万吨,乙城市需要量应全部满足,丙城市供应量不少于 270 万吨.试求将供应量分配完又使总运费为最低的调运方案.

【解】 最大需求量为: $320 + 250 + 350 = 920$ (万吨)

而供应量为: $400 + 450 = 850$ (万吨)

设想有一个供应点 C,其供应量为 $920 - 850 = 70$ (万吨)

将甲、丙的需求量分为两部分:一部分为最低需求量,另一部分为可变部分.这样得到产销平衡表及单位运价表见表 4-57.

表 4-57

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A	15	15	18	22	22	400
B	21	21	25	16	16	450
C	M	0	M	M	0	70
需求	290	30	250	270	80	

其中 M 是一个任意大的正数.对于此产销平衡问题,用伏格尔法求初始解.

① 在表 4-57 中分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下列,见表 4-58.

表 4-58

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	行差额
A	15	15	18	22	22	0
B	21	21	25	16	16	0
C	M	0	M	M	0	0
列差额	6	15	7	6	16	

② 从行差额或列差额中选出最大者,选择它所在的行或列中的最小元素,在表 4-58 中丙'列为最大差额列,其所在的列的最小元素为 0.由此可确定 C 先供应丙'的需求,得到表 4-59,同时将运价表中的 C 行数字划去,得到表 4-60.

表 4-59

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A						
B						
C					70	
需求						

表 4-60

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A	15	15	18	22	22	400
B	21	21	25	16	16	450
C	M	0	M	M	0	70
需求	290	30	250	270	80	

③ 对表 4-60 中未划去的元素分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,重复地做①②,直到求得初始解为止,用此种方法求出表 4-57 的初始解,见表 4-61.

表 4-61

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A	150		250			400
B	140	30		270	10	450
C					70	70
需求	290	30	250	270	80	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-61 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行

中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5)$, 先令 $u_1=0$, 由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j , 得到表 4-62.

表 4-62

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	u_i
A	15		18			0
B	21	21		16	16	6
C					0	-10
v_j	15	15	18	10	10	

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ($i, j \in N$) 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-63.

表 4-63

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	u_i
A	15	15 0	18	22 12	22 12	0
B	21	21	25 1	16	16	6
C	M-5	0 -5	M M-8	M	0	-10
v_j	15	15	18	10	10	

表 4-63 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进.

由表 4-63 可得: $(C, \text{甲}')$ 格的检验数 $\sigma_{32} = -5$ 为负的最小,故 $(C, \text{甲}')$ 为调入格。以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-64.

表 4-64

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A	150		250			400
B	140	30(-1)		270	10(+1)	450
C		(+1)			70(-1)	70
需求	290	30	250	270	80	

$(C, \text{甲}')$ 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者,即 $\theta = \min\{30, 70\} = 30$,按照闭回路上的正负号加上或减去此值,得到调整方案见表 4-65.

表 4-65

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	供应
A	150		250			400
B	140			270	40	450
C		30			40	70
需求	290	30	250	270	80	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-65 中的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4,5)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-66.

表 4-66

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	u_i
A	15		18			0
B	21			16	16	6
C		0			0	-10
v_j	15	10	18	10	10	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-67.

表 4-67

需求地 供应地	甲	甲'	乙	丙	丙'	u_i
A	15	5 15	18	12 22	12 22	0
B	21	5 21	1 25	16	16	6
C	M-5 M	0	M-8 M	M M	0	-10
v_j	15	10	18	10	10	

由表 4-67 可以看出:所有的非基变量检验数 $\sigma_{ij}>0$

∴ 此问题已达到最优解且为唯一最优解.

此时的总运费

$$\min z = 150 \times 150 + 18 \times 250 + 21 \times 140 + 16 \times 270 + 16 \times 40 = 14\ 650 \text{ 万元}$$

4.7 某造船厂根据合同要从当年起连续三年末各提供三条规格型号相同的大型客货轮.已知该厂这三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本如表 4-68 所示.

表 4-68

年 度	正常生产时间内 可完成的客货轮数	加班生产时间内 可完成的客货轮数	正常生产时 每艘成本(万元)
1	2	3	500
2	4	2	600
3	1	3	550

已知加班生产时,每艘客货轮成本比正常生产时高出 70 万元.又知造出来的客货轮如当年不交货,每艘每积压一年造成积压损失为 40 万元.在签订合同时,该厂已积压了两艘未交货的客货轮,而该厂希望在第三年末完成合同后还能储存一艘备用.问该厂应如何安排每年客货轮的生产量,使在满足上述各项要求的情况下,总的生产费用为最少?

【解】 设 A_1, A_2, A_3 分别为三年的需求订货, B_1, B_2, B_3 为三年的正常生产能力, B'_1, B'_2, B'_3 为三年

的加班生产能力, S 为因事先积压而产生的供货能力, 由于第三年还要储存一套, 所以第三年的需求量为 4 套, 由题目所给的数据得到表 4-69 (单元: 万元).

表 4-69

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	供应量
B_1	500	540	580	2
B'_1	570	610	650	3
B_2	M	600	640	4
B'_2	M	670	710	2
B_3	M	M	550	1
B'_3	M	M	620	3
S	40	80	120	2
需求量	3	3	4	

该问题为一个产销不平衡问题且产大于销, 设有一个假想销地 A_4 , 其运价为 0, 其销量为

$$(2+3+4+2+1+3+2)-(3+3+4)=7$$

这样便得到产销平衡表和单位运价表, 见表 4-70. (其中 M 为一个任意大的正数)

表 4-70

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	500	540	580	0	2
B'_1	570	610	650	0	3
B_2	M	600	640	0	4
B'_2	M	670	710	0	2
B_3	M	M	550	0	1
B'_3	M	M	620	0	3
S	40	80	120	0	2
需求量	3	3	4	7	

对于此问题, 用伏格尔法求初始解.

① 在表 4-70 中分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额, 填入该表的最右列和最下列, 见表 4-71.

表 4-71

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	行差额
B_1	500	540	580	0	500
B'_1	570	610	650	0	570
B_2	M	600	640	0	600
B'_2	M	670	710	0	670
B_3	M	M	550	0	550
B'_3	M	M	620	0	620
S	40	80	120	0	40
列差额	460	460	460	0	

② 从行差额或列差额中选出最大者,选择它所在的行或列中的最小元素,表4-71中产地 B'_2 所在的行为最大差额行,其所在的行的最小元素为0.由此可确定产地 B'_2 的产品应先供应 A_4 的需要,得到表4-72,同时将运价表中的 B'_2 行的数字划去,得到表4-73.

表4-72

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1					2
B'_1					3
B_2					4
B'_2				2	2
B_3					1
B'_3					3
S					2
需求量	3	3	4	7	

表4-73

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	500	540	580	0	2
B'_1	570	610	650	0	3
B_2	M	600	640	0	4
B'_2	M	670	710	0	2
B_3	M	M	550	0	1
B'_3	M	M	620	0	3
S	40	80	120	0	2
需求量	3	3	4	7	

③ 对表4-73中未划去的元素分别计算出各行和各列的次最小运费和最小运费的差额,填入该表的最右列和最下行,重复地做①②,直到求得初始解为止.用此种方法求出表4-70的初始解,见表4-74.

表4-74

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2	1		3
B_2			2	2	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3				3	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

下面用位势法进行检验.

① 在对对应表 4-74 的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3,4,5,6,7)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i, \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-75.

表 4-75

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	540			0
B'_1		610	650		70
B_2			640	0	60
B'_2				0	60
B_3			550		-30
B'_3				0	60
S	40				-460
v_j	500	540	580	-60	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-76.

表 4-76

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	v_i
B_1	500	540	580	0	0
B'_1	570	610	650	0	70
B_2	M	600	610	0	60
B'_2	M	670	710	0	60
B_3	M	M	550	0	-30
B'_3	M	M	620	0	60
S	40	80	120	0	-460
v_j	500	540	580	-60	

表 4-76 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进.

由表 4-76 可得: (B'_3, A_3) 格的检验数 $\sigma_{63} = -20$ 为负的最小,故 (B'_3, A_3) 为调入格. 以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-77.

表 4-77

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2	1		3
B_2			2(-1)	2(+1)	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			(+1)	3(-1)	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

(B'_3, A_3) 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者.

$$\text{即 } \theta = \min \{2, 3\} = 2$$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值, 得到调整方案见表 4-78.

表 4-78

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2	1		3
B_2				4	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			2	1	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

下面用位势法进行检验.

① 在对对应表 4-78 的数字格处填入单位运价, 并增加一行一列, 在列中填入 $u_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, 在行中填入 $v_j (j=1, 2, 3, 4)$, 先令 $u_i=0$, 由 $u_i+v_j=c_{ij} (i, j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j , 得到表 4-79.

表 4-79

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	540			0
B'_1		610	650		70
B_2				0	40
B'_2				0	40
B_3			550		-30
B'_3			620	0	40
S	40				-460
v_j	500	540	580	-40	

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ($i, j \in N$) 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-80.

表 4-80

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	540	580 0	0 40	0
B'_1	570 0	610	650	0 -30	70
B_2	M $M-540$	600 20	640 20	0	40
B'_2	M $M-540$	670 90	710 90	0	40
B_3	M $M-470$	M $M-510$	550	0 70	-30
B'_3	M $M-540$	M $M-580$	620	0	40
S	40	80 0	120 0	0 500	-460
v_j	500	540	580	-40	

在表 4-80 中还有负检验数,说明还未得到最优解.用闭回路调整法进行改进.

由表 4-80 可得: (B'_1, A_4) 格的检验数 $\sigma_{24} = -30$ 为负的最小,故 (B'_1, A_4) 为调入格.以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-81.

表 4-81

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2	1(-1)	(+1)	3
B_2				4	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			2(+1)	1(-1)	3
S	2				1
需求量	3	3	4	7	

(B'_1, A_4) 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者

即 $\theta = \min \{1, 1\} = 1$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值, 由于此时出现退化情况, 故在 (B'_3, A_4) 处填入一个 0, 得到调整方案见表 4-82.

表 4-82

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2		1	3
B_2				4	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			3	0	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

下面用位势法进行检验.

① 在对应表 4-82 中的数字格处填入单位运价, 并增加一行一列, 在列中填入 $u_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, 在行中填入 $v_j (j=1, 2, 3, 4)$, 先令 $u_1 = 0$, 由 $u_i + v_j = c_{ij} (i, j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j , 得到表 4-83.

表 4-83

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	540			0
B'_1		610		0	70
B_2				0	70
B'_2				0	70
B_3			500		0
B'_3			620	0	70
S	40				-460
v_j	500	540	550	-70	

② 由 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) (i, j \in N)$ 计算所有空格的检验数, 并在每个格的右上角填入单位运价, 得到表 4-84.

表 4-84

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	540	30580	700	0
B'_1	0570	610	30650	0	70
B_2	M-570	-10600	20640	0	70

续表 4-84

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B'_2	$M-570$ $\overline{M}$	60 $\overline{670}$	90 $\overline{710}$	$\overline{0}$	70
B_3	$M-500$ $\overline{M}$	$M-540$ $\overline{M}$	$\overline{550}$	70 $\overline{0}$	0
B'_3	$M-570$ $\overline{M}$	$M-610$ $\overline{M}$	$\overline{620}$	$\overline{0}$	70
S	$\overline{40}$	0 $\overline{80}$	30 $\overline{120}$	530 $\overline{0}$	-460
v_j	500	540	550	-70	

表 4-84 中还有负检验数,说明还未得到最优解,用闭回路调整法进行改进。

由表 4-84 可得: (B_2, A_2) 格的检验数 $\sigma_{32} = -10$ 为负的最小,故 (B_2, A_2) 为调入格. 以此格为出发点,作一闭回路,见表 4-85.

表 4-85

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1		2(-1)		1(+1)	3
B_2		(-1)		4(-1)	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			3	0	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

(B_2, A_2) 格调入量 θ 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者

$$\text{即 } \theta = \min \{2, 4\} = 2$$

按照闭回路上的正负号加上或减去此值,得到调整方案见表 4-86.

表 4-86

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	1	1			2
B'_1				3	3
B_2		2		2	4
B'_2				2	2
B_3			1		1
B'_3			3	0	3
S	2				2
需求量	3	3	4	7	

下面用位势法进行检验：

① 在对应表 4-86 的数字格处填入单位运价,并增加一行一列,在列中填入 $u_i (i=1,2,3,4,5,6,7)$,在行中填入 $v_j (j=1,2,3,4)$,先令 $u_1=0$,由 $u_i+v_j=c_{ij} (i,j \in B)$ 来确定 u_i 和 v_j ,得到表 4-87.

表 4-87

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	供应量
B_1	500	540			0
B'_1				0	60
B_2		600		0	60
B'_2				0	60
B_3			550		-10
B'_3			620	0	60
S	40				-460
需求量	500	540	560	-60	

② 由 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j) (i,j \in N)$ 计算所有空格的检验数,并在每个格的右上角填入单位运价,得到表 4-88.

表 4-88

产地 \ 销地	A_1	A_2	A_3	A_4	u_i
B_1	500	500	20 580	60 0	0
B'_1	10 570	10 610	30 650	0	60
B_2	$M-560$ M	600	20 640	0	60
B'_2	$M-560$ M	70 670	90 710	0	60
B_3	$M-490$ M	$M-530$ M	550	70 0	-10
B'_3	$M-560$ M	$M-600$ M	620	0	60
S	40	0 80	20 120	520 0	-460
v_j	500	540	560	-60	

由表 4-88 可以看出：

所有非基变量的检验数 $\sigma_{ij} \geq 0$

故此问题已达到最优解.

又 $\because$ 非基变量的检验数 $\sigma_{72}=0$

$\therefore$ 此问题有无穷多最优解.

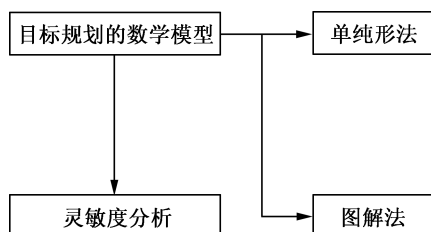
此时的总运费

$$\min z = 500 \times 1 + 540 \times 1 + 600 \times 2 + 550 \times 1 + 620 \times 3 + 40 \times 2 = 4\,730 \text{ 万元}$$

该厂的生产量安排方案见表 4-86.

第 5 章 线性目标规划

知识结构图



学习要求

1. 目标规划的定义.
2. 目标规划的转换建模技巧.
3. 目标规划的图解法求解模型.
4. 目标规划的单纯形法的求解模型.
5. 对应用问题进行分析和建模.

重点、难点解答

1. 目标规划有着极大的灵活性,表现在它可以模拟系统的约束和目标优先等级变化的种种模型,为管理决策提供众多的信息.解决目标规划问题,首先要根据目标的重要性,分清主次先后、轻重缓急,引入偏差变量,将目标按等级转化为目标约束,最终形成可用线性规划方法解决的问题.目标规划可用于以下三种类型的决策分析:

- (1) 为了达到一组预定目标,它能决定系统投入需要量.
- (2) 对于已给定的有限资源,它能决定计划目标所能达到的程度.

(3) 在变化的系统输入和目标体系下,它能提供最满意解.值得注意的是,目标规划也有其局限性,即在已知约束条件下和给定了优先等级顺序的条件下才能给出系统的满意解.此外对于原目标函数必须附加目标值限制才能组成系统的目标约束,这常常是模型构造过程中人为的控制.

2. 图解法

图解法,简单直观,在平面上作图适于求解只有两个决策变量的问题.目标规划与线性规划不同,它一般是寻求一个区域,这个区域提供了相互矛盾的目标集的折衷方案.

图解法的基本步骤:

- (1) 令各偏差变量为 0,作出所有的约束直线.
- (2) 作图表示偏差变量增加对约束直线的影响.
- (3) 确定满足第一优先级目标集的最优解空间(不考虑其他优先级).
- (4) 转到第 $k+1$ 优先级,求出其相应的最优解空间.
- (5) 令 $k=k+1$,反复执行步骤(4)直到所有优先集均求解完毕.

3. 解目标规划问题的单纯形法的步骤:

- (1) 建立初始单纯形表,在表中将检验数行按优先因子个数分别排成 k 行,置 $k=1$.

(2) 检验该行中是否存在负数且对应的前 $k-1$ 行的系数为 0, 若有取其中最小者对应的变量, 转步 (3); 若无, 则转步 (5).

(3) 按最小比值法则确定换出变量, 当存在两个和两个以上相同的最小比值的时候, 选取具有较高优先级别的变量为换出变量.

(4) 按单纯形法进行基变换运算, 建立新的计算表, 返回步 (2).

(5) 当 $k=K$ 时, 计算停止, 表中的解即为满意解, 否则置 $k=k+1$ 返回步 (2).

课后习题全解

5.1 若用以下表达式作为目标规划的目标函数, 试述其逻辑是否正确?

$$(1) \max z = d^- + d^+; \quad (2) \max z = d^- + d^+;$$

$$(3) \min z = d^- + d^+; \quad (4) \min z = d^- - d^+.$$

【解】(1) 不正确.

要求 $\max z = d^- + d^+$, 而 $d^- \times d^+ = 0$

即求 d^- 或 d^+ 最大, 而 d^- 表示决策值未达到目标值的部分,

d^+ 表示决策值超过目标值的部分.

故求 $\max z = d^- + d^+$ 无实际意义.

(2) 正确.

要求 $\max z = d^- - d^+$, 而 $d^- \times d^+ = 0$, 则 $d^+ = 0$, $d^- > 0$

即表示未达到目标值越大越好.

(3) 正确.

要求 $\min z = d^- + d^+$, 即正、负偏差变量都要尽可能地小.

而 $d^- \times d^+ = 0$, 则 $d^+ = d^- = 0$

即恰好达到目标值.

(4) 正确.

要求 $\min z = d^- - d^+$, 而 $d^- \times d^+ = 0$, 则 $d^- = 0$, $d^+ > 0$

即表示超过目标值越大越好.

5.2 分别用图解法和单纯形法找出以下目标规划问题的满意解.

$$(1) \min z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(2d_2^+ + d_3^+)$$

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 3x_1 + 5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 20 \\ 8x_1 + 6x_2 + d_3^- - d_3^+ = 100 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i=1, 2, 3. \end{cases}$$

$$(2) \min z = P_1(d_3^+ + d_4^+) + P_2d_1^+ + P_3d_2^- + P_4(d_3^- + 1.5d_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 100 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i=1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

$$(3) \min z = P_1d_2^+ + P_1d_2^- + P_2d_1^-$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ 10x_1 + 12x_2 + d_2^- - d_2^+ = 62.4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i=1, 2. \end{cases}$$

(4) $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (5d_3^- + 3d_4^-) + P_4 d_1^+$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 90 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 70 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 45 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i=1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

【解】 (1) 由约束条件作图 5-1.

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现 $\min(d_1^- + d_1^+)$

从图中可以看出:

当 x_1, x_2 在射线 $x_1 - 10x_2 = 50$ 且 $x_2 \geq 0$ 上取值, 可以满足 $d_1^- = 0$ 和 $d_1^+ = 0$

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现

$$\min(2d_2^+ + d_3^+)$$

因 d_2^+ 的权系数大于 d_3^+ 的权系数, 由图可知, D 点为满意解, D 点坐标为 $(50, 0)$.

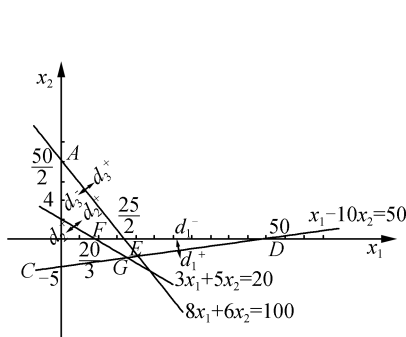


图 5-1

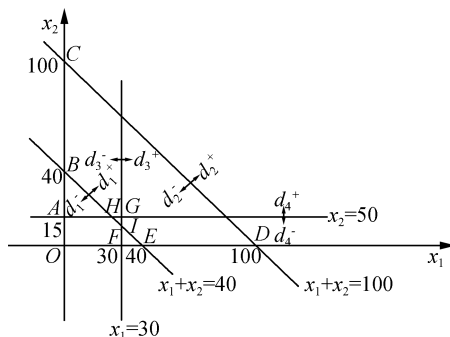


图 5-2

(2) 由约束条件作图 5-2.

首先考虑 P_1 优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现 $\min(d_3^+ + d_4^+)$

从图中可以看出: 可以满足 $d_3^+ = 0$ 和 $d_4^+ = 0$.

此时 x_1, x_2 在区域 $OAGFO$ 内取值.

再考虑 P_2 优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现 $\min d_1^+$

从图中可以看出: 可以满足 $d_1^+ = 0$.

此时 x_1, x_2 在区域 $OAHIFO$ 内取值.

再考虑 P_3 优先因子的目标的实现, 在目标函数中要求实现 $\min d_2^-$

从图中可以看出: 当 x_1, x_2 在线段 HI 上取值时, 可以使 d_2^- 取最小.

最后考虑 P_4 优先因子的目标的实现. 因 d_4^- 的权系数大于 d_3^- 的权系数, 故先考虑 d_4^- 取

从图中可以看出: 可以满足 $d_4^- = 0$.

此时得到 H 为满意解. H 点坐标为 $(25, 15)$.

(3) 将上述目标规划问题化为如下形式:

$$\begin{aligned} \min z &= P_1 d_2^+ + P_1 d_2^- + P_2 d_1^- \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ 10x_1 + 12x_2 + d_2^- - d_2^+ = 62.4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i=1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 x_3 为松弛变量.

对于此问题用单纯形法进行计算, 见表 5-1.

表 5-1

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
P_2	d_1^-	10	1	[2]	0	1	-1	0	0	5
P_1	d_2^-	62.4	10	12	0	0	0	1	-1	5.2
0	x_3	8	2	1	1	0	0	0	0	8
P_1			-10	-12	0	0	0	0	2	
P_2			-1	-2	0	0	1	0	0	
0	x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	—
P_2	d_2^-	2.4	4	0	0	-6	[6]	1	-1	0.4
0	x_3	3	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	6
P_1			-4	0	0	6	-6	0	2	
P_2			0	0	0	1	0	0	0	
0	x_2	5.2	$\frac{5}{6}$	1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	6.24
0	d_1^+	0.4	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	0	-1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0.6
0	x_3	2.8	$\frac{7}{6}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	2.4
P_1			0	0	0	0	0	1	1	
P_2			0	0	0	1	0	0	0	

由表 5-1 可得: $x_1 = 0$, $x_2 = 5.2$ 为原问题的满意解.

而非基变量 x_1 的检验数为 0, 故原问题存在多重解.

在表 5-1 的基础上以 x_1 为换入变量, d_1^+ 为换出变量再迭代一步, 得表 5-2.

表 5-2

c_j			0	0	0	P_2	0	P_1	P_1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	
0	x_2	4.7	0	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	

0	x_2	20	0	1	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0
P_4	d_1^+	10	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	
0	x_1	70	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	
$3P_3$	d_4^-	25	0	0	0	0	-1	1	1	-1	1	-1	
P_1			0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
P_2			0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
P_3			0	0	0	0	3	-3	2	3	0	3	
P_4			0	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	

由表 5-3 可得: $x_1 = 70, x_2 = 20$ 为原问题的满意解.

5.3 根据本书第 2 章习题 2.10 给出的某糖果厂生产计划优先的各项数据,若该糖果厂确定生产计划的目标函数为:

P_1 ——利润不低于某预期值;

P_2 ——甲、乙、丙三种糖果的原材料比例性满足配方要求;

P_3 ——充分利用又不超过规定的原材料供应量.

根据上述要求,构建目标规划的数学模型.

【解】 2.10 的线性规划模型为:

$$\max z = 0.9x_1 + 1.4x_2 + 1.9x_3 + 0.45x_4 + 0.95x_5 + 1.45x_6 - 0.05x_7 + 0.45x_8 + 0.95x_9$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0.6(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_4 \geq 0.15(x_4 + x_5 + x_6) \\ x_6 \leq 0.6(x_4 + x_5 + x_6) \\ x_9 \leq 0.5(x_7 + x_8 + x_9) \\ x_1 + x_4 + x_7 \leq 2000 \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 2500 \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 1200 \\ x_i \geq 0 (i = 1, \dots, 9) \end{cases}$$

设利润预期盈利,分别赋予这三个目标则容易得到该问题的目标规划模型: P_1, P_2, P_3 优先因子.

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 \sum_{i=2}^6 (d_i^- + d_i^+) + P_3 (d_7^+ + d_8^+ + d_9^+)$$

$$\begin{cases}
 0.9x_1 + 1.4x_2 + 1.9x_3 + 0.45x_4 + 0.95x_5 + 1.45x_6 - 0.05x_7 + 0.45x_8 + 0.95x_9 + \\
 d_1^- - d_1^+ = M \\
 0.6(x_1 + x_2 + x_3) - x_1 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\
 x_3 - 0.2(x_1 + x_2 + x_3) + d_3^- - d_3^+ = 0 \\
 0.15(x_4 + x_5 + x_6) - x_4 + d_4^- - d_4^+ = 0 \\
 x_6 - 0.6(x_4 + x_5 + x_6) + d_5^- - d_5^+ = 0 \\
 x_9 - 0.5(x_7 + x_8 + x_9) - d_6^- - d_6^+ = 0 \\
 (x_1 + x_4 + x_7 + d_7^- - d_7^+) = 2000 \\
 x_2 + x_5 + x_7 + d_8^- - d_8^+ = 2500 \\
 x_3 + x_6 + x_7 + d_9^- - d_9^+ = 1200 \\
 x_i, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1, \dots, 9)
 \end{cases}$$

5.4 南溪市计划在下一年度预算中购置一批救护车,已知每辆购置价为 20 万元.救护车用于所属 A, B 两个郊区县,各分配 x_A 辆和 x_B 辆. A 县救护站从接到呼叫到出动的响应时间为 $(40-3x_A)$ 分钟; B 县救护站的响应时间为 $(50-4x_B)$ 分钟. 该市确定如下优先目标:

P_1 ——用于救护车的购置费不超过 400 万元;

P_2 ——A 县的响应时间不超过 8 分钟;

P_3 ——B 县的响应时间不超过 8 分钟.

要求:

(1) 建立目标规划模型,并求出满意解;

(2) 若对优先级目标函数进行调整,将 P_2 调为 P_1 , P_3 调为 P_2 , P_1 调为 P_3 , 试重新构建目标规划的数学模型,并找出新的满意解.

【解】 (1) $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+$

$$\begin{cases}
 20x_A + 20x_B + d_1^- - d_1^+ = 400 & \text{①} \\
 40 - 3x_A + d_2^- - d_2^+ = 8 & \text{②} \\
 50 - 4x_B + d_3^- - d_3^+ = 8 & \text{③} \\
 x_A, x_B, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1, 2, 3)
 \end{cases}$$

图解公式,如图 5-3 所示:

约束条件①可行区域为 AOB

①和②的可行区域为 DCB

①和③的可行区域为 AEF

故无公共区

故在实现①和②的基础上考虑区域中使 d_3^+ 最小的,即为满意解.

显然 D 点为满意解

故满意解为 $(\frac{32}{3}, \frac{28}{3})$

(2) $\min z = P_1 d_2^+ + P_2 d_3^+ + P_3 d_1^+$

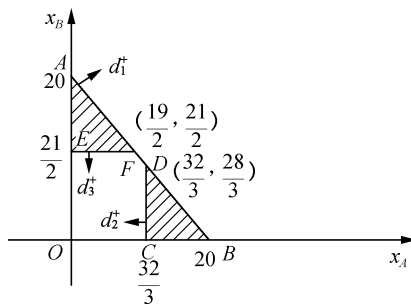


图 5-3

$$\begin{cases} 20x_A + 20x_B + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ 40 - 3x_A + d_2^- - d_2^+ = 8 \\ 50 - 4x_B + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_A, x_B, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ (i=1,2,3) \end{cases}$$

由图 5-4 可以看出:实现 P_1 为 GC 右边区域

实现 P_2 为 DH 上方区域

故实现①②后区域为 GFH 右上区域,此时不能满足 $d_1^+ = 0$

故在 GFH 右上区域或使 d_1^+ 最小的, F 点 $\left(\frac{32}{3}, \frac{21}{2}\right)$ 为满意解.

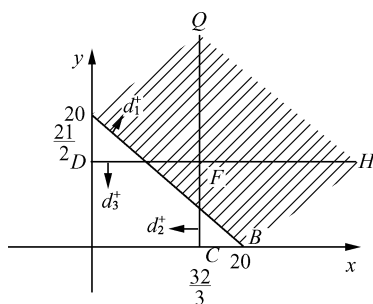


图 5-4

5.5 某商标的酒是用三种等级的酒兑制而成.若这三种等级的酒每天供应量和单位成本为:

等 级	日供应量 kg	成本 元/kg
I	1 500	6
II	2 000	4.5
III	1 000	3

设该种牌号酒有三种商标(红、黄、蓝),各种商标的酒对原料酒的混合比及售价,见表5-4.决策者规定:首先必须严格按照规定比例兑制各商标的酒;其次是获利最大;再次是红商标的酒每天至少生产2 000 kg.试列出数学模型.

表 5-4

商 标	兑制要求	售价 元/kg
红	III 少于 10% I 多于 50%	5.5

续表 5-4

商 标	兑制要求	售价 元/kg
黄	Ⅲ 少于 70% Ⅰ 多于 20%	5.0
蓝	Ⅲ 少于 50% Ⅰ 多于 10%	4.8

【解】 设 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} ($i=1, 2, 3$) 分别表示第 i 种等级的兑制红、黄、蓝三种商标的酒的数量。则建立下述的数学模型。

$$\max z = P_1(d_1^- + d_2^+ + d_3^- + d_4^+ + d_5^- + d_6^+) + P_2 d_8^+ + P_3 d_7^+$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_{31} - 0.1(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_{11} - 0.5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ x_{32} - 0.7(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + d_3^- - d_3^+ = 0 \\ x_{12} - 0.2(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + d_4^- - d_4^+ = 0 \\ x_{33} - 0.5(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + d_5^- - d_5^+ = 0 \\ x_{13} - 0.1(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + d_6^- - d_6^+ = 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + d_7^- - d_7^+ = 2\,000 \end{cases}$$

其中

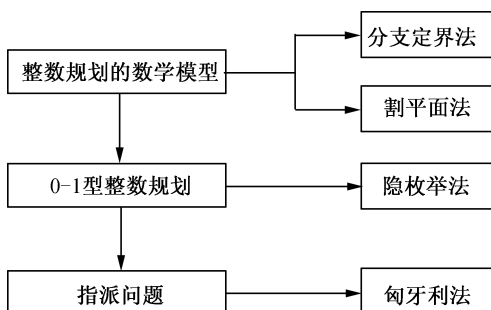
$$z = 5.5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 5.0(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 4.8(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 6(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 4.5(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 3(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + d_8^- - d_8^+$$

而根据下面的模型求出最大利润

$$\begin{aligned} \max z = & 5.5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 5.0(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 4.8(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - \\ & 6(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 4.5(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 3(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} x_{31} - 0.1(x_{11} + x_{21} + x_{31}) < 0 \\ x_{11} - 0.5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) > 0 \\ x_{32} - 0.7(x_{12} + x_{22} + x_{32}) < 0 \\ x_{12} - 0.2(x_{12} + x_{22} + x_{32}) > 0 \\ x_{33} - 0.5(x_{13} + x_{23} + x_{33}) < 0 \\ x_{13} - 0.1(x_{13} + x_{23} + x_{33}) > 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 2\,000 \end{cases} \end{aligned}$$

第 6 章 整数线性规划

知识结构图



学习要求

1. 了解整数规划问题的特点;
2. 熟悉分支定界法和割平面法的原理及其应用;
3. 掌握 0—1 规划问题的求解方法——隐枚举法;
4. 掌握指派问题的求解方法——匈牙利法.

重点、难点解答

1. 整数规划模型的建立几乎与线性规划模型的建立完全一致,只是变量的部分或全体必须限制为整数,因而建模步骤仍为:

- (1) 分析与定义决策变量并要非负.
- (2) 写出对应的目标函数.
- (3) 根据题意列出约束条件并标准化.
- (4) 判断模型属于哪种类型以确定合适的解题方法.

2. 整数规划模型解法中应注意的问题

整数规划的求解主要采用割平面法和分枝定界法.分枝定界法是借用线性规划单纯形法的基本思想,在求相应的线性模型解的同时,逐步加入对各变量的整数要求限制.其结果将会出现分枝现象,即一个线性规划模型分成两个线性规划模型,逐步下去,最终求出整数解.因此,整数规划的解实际上是线性规划的满意解.

解题过程容易犯的错误是,当分枝下去后,忘记了所得结果要和前一级分枝的解进行比较,其次,当题目不是很繁杂,且是两维时,用图解法要比分枝定界法要简便而准确.从某种意义上来说,整数解就是可行解域中的整数网格上的点.

课后习题全解

- 6.1 对下列整数规划问题,问用先解相应的线性规划然后凑整的办法能否求到最优整数解?

$$(1) \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

$$(2) \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

【解】 (1) 将上述问题化为如下形式:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14.5 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16.5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{N} \end{cases}$$

用单纯形法解相应的线性规划问题, 见表 6-1.

表 6-1

c_j			3	2	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	$\frac{29}{2}$	2	3	1	0	$\frac{29}{4}$
0	x_4	$\frac{33}{2}$	[4]	1	0	1	$\frac{33}{8}$
$-z$		0	3	2	0	0	
0	x_3	$\frac{25}{4}$	0	$\left[\frac{5}{2}\right]$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
3	x_1	$\frac{33}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{33}{2}$
$-z$		$-\frac{99}{8}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	
2	x_2	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
3	x_1	$\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	
$-z$		$-\frac{31}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

由表 6-1 可得:

$$\text{相应线性规划问题的最优解为: } X^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \max z = \frac{31}{2}$$

当凑整为 $X_1 = (4, 3, 0, 0)^T$ 时, 为非可行解.

当凑整为 $X_2 = (4, 2, 0, 0)^T$ 时, 为非可行解.

当凑整为 $X_3 = (3, 3, 0, 0)^T$ 时, 为非可行解.

当凑整为 $X_4 = (3, 2, 0, 0)^T$ 时, 为可行解, $z = 13$

下面用分枝定界法解整数规划问题.

令 $z = \frac{31}{2}$, 显然 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 为可行解.

$$\therefore z = 0$$

$$\therefore 0 \leq z^* \leq \frac{31}{2}$$

将原问题分解为下述两个问题

$$(B_1) \quad \begin{aligned} \max z_1 &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ 0 \leq x_1 \leq 3, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(B_2) \quad \begin{aligned} \max z_2 &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1 \geq 4, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于 (B_1) 将其化为标准型式:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ \text{s. t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14.5 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16.5 \\ x_1 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题, 用单纯形法进行求解, 见表 6-2.

表 6-2

c_j			3	2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	$\frac{29}{2}$	2	3	1	0	0	$\frac{29}{4}$
0	x_4	$\frac{33}{2}$	4	1	0	1	0	$\frac{33}{8}$
0	x_5	3	[1]	0	0	0	1	3
$-z_1$		0	3	2	0	0	0	
0	x_3	$\frac{17}{2}$	0	[3]	1	0	-2	$\frac{17}{6}$
0	x_4	$\frac{9}{2}$	0	1	0	1	-4	$\frac{9}{2}$
3	x_1	3	1	0	0	0	1	—
$-z_1$		-9	0	2	0	0	-3	
2	x_2	$\frac{17}{6}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	
0	x_4	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{10}{3}$	

3	x_1	3	1	0	0	0	1	
$-z_1$		$-\frac{44}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	

由表 6-2 可得:

$$(B_1) \text{ 的最优解为 } \left(3, \frac{17}{6}, 0, \frac{5}{3}, 0\right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \max z_1 = \frac{44}{3}$$

$$\text{同样可得 } (B_2) \text{ 的最优解为 } \left(4, \frac{1}{2}, 5, 0, 0\right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \max z_2 = 13$$

$$\therefore \underline{z} = 0, \quad \bar{z} = \frac{44}{3}$$

$$\therefore 0 \leq z^* \leq \frac{44}{3}$$

再将 (B_1) 分为下述两个问题

$$\begin{aligned} \max z_3 &= 3x_1 + 2x_2 \\ (B_3) \text{ s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_4 &= 3x_1 + 2x_2 \\ (B_4) \text{ s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于 (B_3) 将其化为标准型式:

$$\begin{aligned} \max z_3 &= 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14.5 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16.5 \\ x_1 + x_5 = 3 \\ x_2 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题,用单纯形法进行求解,见表 6-3.

表 6-3

c_j			3	2	0	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

0	x_3	$\frac{29}{2}$	2	3	1	0	0	0	$\frac{29}{4}$
0	x_4	$\frac{33}{2}$	4	1	0	1	0	0	$\frac{33}{8}$
0	x_5	3	[1]	0	0	0	1	0	3
0	x_6	2	0	1	0	0	0	1	—
$-z_3$		0	3	2	0	0	0	0	

续表 6-3

0	x_3	$\frac{17}{2}$	0	3	1	0	-2	0	$\frac{17}{6}$
0	x_4	$\frac{9}{2}$	0	1	0	1	-4	0	$\frac{9}{2}$
3	x_1	3	1	0	0	0	1	0	—
0	x_6	2	0	[1]	0	0	0	1	2
$-z_3$		-9	0	2	0	0	-3	0	
0	x_3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	0	-2	-3	
0	x_4	$\frac{5}{2}$	0	0	0	1	-4	-1	
3	x_1	3	1	0	0	0	1	0	
2	x_2	2	0	1	0	0	0	1	
$-z_3$		-13	0	0	0	0	-3	-2	

由表 6-3 可得:

$$(B_3) \text{ 的最优解为 } \left(3, 2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)^T$$

$$\text{目标函数的最优值 } \max z_3 = 13$$

$$\text{同样可得 } (B_4) \text{ 的最优解为 } \left(\frac{11}{4}, 3, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)^T$$

$$\max z_4 = \frac{57}{4}$$

B_3 已是整数解, 可取 $z = z_3 = 13$.

而 $\max z_2 = 13$, 对 B_2 分解已无意义, 故舍去.

$$\therefore 13 \leq z^* \leq \frac{57}{4}$$

将 (B_4) 分解为下述两个问题.

$$\begin{aligned} \max z_5 &= 3x_1 + 2x_2 \\ (B_5) \text{ s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于此线性规划问题, 用单纯形法解得其最优解为

$$X^* = \left(2, \frac{7}{2}, 0, 5, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$$

目标函数最优值 $\max z_5 = 13 = z$, 故舍弃.

$$\max z_6 = 3x_1 + 2x_2$$

$$(B_6) \text{ s. t. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14.5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16.5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

由条件, $x_1 \leq 3$ 和 $x_1 \geq 3$ 得 $x_1 = 3$

$\therefore (B_6)$ 变为:

$$\begin{aligned} \max z_6 &= 9 + 2x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 3x_2 \leq 8.5 \\ x_2 \leq 4.5 \\ x_2 \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

可得此线性规划问题的可行域为空集, 故舍去.

$\therefore x_1 = 3, x_2 = 2$ 为最优整数解

$$z^* = z = 13$$

(2) 用图解法解其相应的线性规划问题

图 6-1 中的阴影部分为相应线性规划问题的可行域. 目标函数 $z = 3x_1 + 2x_2$, 即 $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{2}$ 是斜率为 $-\frac{3}{2}$ 的一族平行线, 由线性规划的性质知, 其最值只可能在可行域的顶点取得, 易知 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 为

可行解, 将直线 $3x_1 + 2x_2 = 0$ 沿其法线方向逐渐向上平移, 直至 B 点, B 点坐标为 $(\frac{13}{4}, \frac{5}{2})$.

目标函数的最优值

$$\max z = 3 \times \frac{13}{4} + 2 \times \frac{5}{2} = \frac{59}{4}$$

当凑整为 $X_1 = (3, 2)^T$ 时, 为可行解, $z = 13$

当凑整为 $X_2 = (3, 3)^T$ 时, 为非可行解.

当凑整为 $X_3 = (4, 2)^T$ 时, 为非可行解.

当凑整为 $X_4 = (4, 3)^T$ 时, 为非可行解.

下面用分枝定界法来解整数规划问题

令 $z = \frac{59}{4}$, 显然 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 为可行解.

$$\therefore z = 0$$

$$\therefore 0 \leq z^* \leq \frac{59}{4}$$

将原问题分解为下述两个问题

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 3x_1 + 2x_2 \\ (B_1) \text{ s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

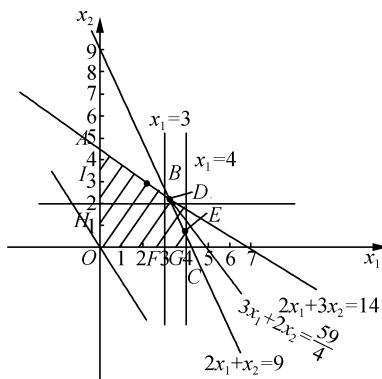


图 6-1

$$\begin{aligned} \max z_2 &= 3x_1 + 2x_2 \\ (B_2) \text{ s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于 (B_1) 和 (B_2) ,用图解法求解,在图6-1的基础上,增加两条直线 $x_1 = 3$ 和 $x_1 = 4$,得到两个区域 $OADFO$ 和 $GECC$,分别为 (B_1) 和 (B_2) 的可行域,从图中可以看出:

(B_1) 在 D 点取得最优值,而 D 点坐标为 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

$$\max z_1 = 3 \times 3 + 2 \times \frac{8}{3} = \frac{43}{3}$$

(B_2) 在 E 点取得最优值,而 E 点坐标为 $(4, 1)$,为整数点.

$$\max z_2 = 3 \times 4 + 2 \times 1 = 14$$

$$\therefore \underline{z} = 14, \quad \bar{z} = \frac{43}{3}$$

$$\therefore 14 \leq z^* \leq \frac{43}{3}$$

且 z^* 为整数

$$\therefore z^* = 14$$

$x_1 = 4, x_2 = 1$ 为最优整数解.

6.2 用分枝定界法解:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases} \end{aligned}$$

【解】用图解法解其相应的线性规划问题

图6-2中的阴影部分为相应线性规划问题的可行域,目标函数 $z = x_1 + x_2$ 即 $x_2 = -x_1 + z$ 是斜率为-1的

一族平行线,由线性规划的性质知,其最值只可能在可行域的顶点取得,易知 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 为可得解,将

直线 $x_1 + x_2 = 0$ 沿其法线方向逐渐向上平移,直至 B 点, B 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right)$.

$$\text{目标函数的最优值 } \max z = x_1 + x_2 = \frac{29}{6}$$

下面用分枝定界法来解整数规划问题.

$$\text{令 } \bar{z} = \frac{29}{6}, \text{ 显然 } x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ 为可行解}$$

$$\therefore \underline{z} = 0, \therefore 0 \leq z^* \leq \frac{29}{6}$$

将原问题分解为下述两个问题:

$$\max z_1 = x_1 + x_2$$

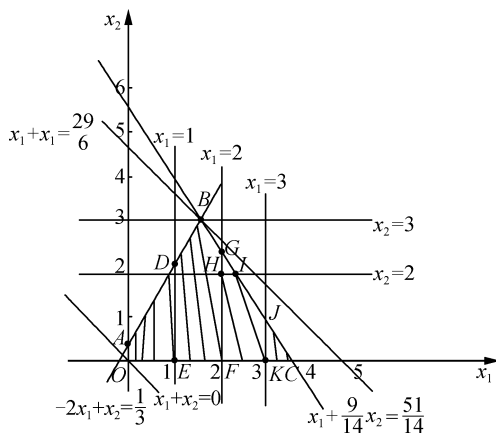


图 6-2

$$(B_1) \text{ s. t. } \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z_2 = x_1 + x_2$$

$$(B_2) \text{ s. t. } \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

对于 (B_1) 和 (B_2) 用图解法求解,在图6-2的基础上,增加两条直线 $x_1=1$ 和 $x_2=2$,得到区域 $OADEO$ 和 $FGCF$,分别为 (B_1) 和 (B_2) 的可行域,从图中可以看出:

(B_1) 在 D 点取得最大值,而 D 点坐标为 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$

$$\max z_1 = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$$

(B_2) 在 G 点取得最大值,而 G 点坐标为 $\left(2, \frac{23}{9}\right)$

$$\max z_2 = 2 + \frac{23}{9} = \frac{41}{9}$$

$$\therefore z = \frac{41}{9}, z_- = 0, \therefore 0 \leq z^* \leq \frac{41}{9}$$

将 (B_2) 分解为下述两个问题

$$\max z_3 = x_1 + x_2$$

$$(B_3) \text{ s. t. } \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z_4 = x_1 + x_2$$

$$(B_4) \text{ s. t. } \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 3 \end{cases}$$

对于 (B_3) 和 (B_4) ,用图解法求解,在图6-2的基础上,增加两条直线 $x_2=2$ 和 $x_2=3$,得到区域 $FHICF$ 为 (B_3) 的可行域,而 (B_4) 的可行域为空集,故 (B_4) 无可行解。

从图中可以看出:

(B_3) 在 I 点取得最大值, 而 I 点坐标为 $\left(\frac{33}{14}, 2\right)$.

$$\max z_3 = \frac{33}{14} + 2 = \frac{61}{14}$$

$$\underline{z} = \frac{61}{14}$$

$$\therefore 0 \leq z^* \leq \frac{61}{14}$$

将 (B_3) 分解为下述两个问题

$$\begin{aligned} \max z_5 &= x_1 + x_2 \\ (B_5) \text{ s. t. } &\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_6 &= x_1 + x_2 \\ (B_6) \text{ s. t. } &\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对于 (B_5) 和 (B_6) , 用图解法求解, 在图 6-2 的基础上, 增加两条直线 $x_1 = 2$ 和 $x_1 = 3$, 得到区域 $KJCK$ 为 (B_5) 的可行域, 线段 FH 为 (B_6) 的可行域.

从图中可以看出:

(B_5) 在 H 点达到最大值, 而 H 点坐标为 $(2, 2)$

$$\max z_5 = 2 + 2 = 4$$

(B_6) 在 J 点达到最大值, 而 J 点坐标为 $(3, 1)$

$$\max z_6 = 3 + 1 = 4$$

$$\therefore \underline{z} = 4$$

$$\text{而 } \max z_1 = \frac{8}{3} < 4$$

对 (B_1) 进行分解已无意义, 故舍去.

$$\therefore 4 \leq z^* \leq \frac{61}{14}$$

$\therefore z^*$ 为整数

$$\therefore z^* = 4$$

$x_1 = 2, x_2 = 2$ 和 $x_1 = 3, x_2 = 1$ 均为该问题的最优解.

6.3 用 Gomory 切割法解:

$$\begin{aligned}
 (1) \max z &= x_1 + x_2 & (2) \max z &= 3x_1 - x_2 \\
 \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases} & & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

【解】(1) 将上述问题化为标准型式:

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
 \text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N} \end{cases}
 \end{aligned}$$

下面用单纯形法解其相应的线性规划问题,见表 6-4.

表 6-4

c_j			1	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	[2]	1	1	0	3
0	x_4	20	4	5	0	1	5
$-z$		0	1	1	0	0	
1	x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6
0	x_4	8	0	[3]	-2	1	$\frac{8}{3}$
$-z$		-3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
1	x_1	$\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	
1	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$-z$		$-\frac{13}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	

由表 6-4 可得:

与原问题相应的线性规划问题的解为: $X^* = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, 0, 0\right)^T$ 目标函数的最优值 $\max z = \frac{13}{3}$

由最终单纯形表得到变量间的关系:

$$x_1 + \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 = \frac{5}{3}, x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{8}{3}$$

将系数和常数项都分解成整数和非负真分数之和.

上面两式变为

$$x_1 - x_4 - 1 = \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 \right), x_2 - x_3 - 2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \right)$$

$$\therefore x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}$$

$\therefore$ 上面两式左边均为整数, 右边也均为整数且为非正

$$\therefore \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 \right) \leq 0, \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \right) \leq 0$$

化简得

$$-5x_3 - 5x_4 \leq -4, -x_3 - x_4 \leq -2$$

加入松弛变量 x_5 , 得 $-x_3 - x_4 + x_5 = -2$

将这个新的约束条件反映到表 6-4 的最终计算表中, 用对偶单纯形法进行迭代, 得到表 6-5.

表 6-5

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	$\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
1	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_5	-2	0	0	$[-1]$	-1	1
$-z$		$-\frac{13}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
1	x_1	0	1	0	0	-1	$\frac{5}{6}$
1	x_2	4	0	1	0	1	$-\frac{2}{3}$
0	x_3	2	0	0	1	1	-1
$-z$		-4	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$

由表 6-5 可得: $x^+ = (0, 4, 2, 0, 0)^T$, 已为整数解, $\max z = 4$

$\therefore$ 原整数规划问题的最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 4$

目标函数最优值 $\max z = 4$

(2) 将上述问题化为标准型式:

$$\max z = 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N} \end{cases}$$

下面用单纯形法解其相应的线性规划问题, 见表 6-6.

表 6-6

c_j			3	-1	0	0	0	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	

0	x_3	3	[3]	-2	1	0	0	0	1
$-M$	x_6	10	5	4	0	-1	0	1	2

续表 6-6

0	x_5	5	2	1	0	0	1	0	$\frac{5}{2}$
$-z$		$10M$	$5M+3$	$4M-1$	0	$-M$	0	0	
3	x_1	1	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	—
$-M$	x_6	5	0	$\left[\frac{22}{3}\right]$	$-\frac{5}{3}$	-1	0	1	$\frac{15}{22}$
0	x_5	3	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{9}{7}$
$-z$		$5M-3$	0	$\frac{22}{3}M+1$	$-\frac{5}{3}M-1$	$-M$	0	0	
3	x_1	$\frac{16}{11}$	1	0	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	—
-1	x_2	$\frac{15}{22}$	0	1	$-\frac{5}{22}$	$-\frac{3}{22}$	0	$\frac{3}{22}$	—
0	x_5	$\frac{31}{22}$	0	0	$-\frac{3}{22}$	$\left[\frac{7}{22}\right]$	1	$-\frac{7}{22}$	$\frac{31}{7}$
$-z$		$-\frac{81}{22}$	0	0	$-\frac{7}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$-M-\frac{3}{22}$	
3	x_1	$\frac{13}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	
-1	x_2	$\frac{9}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	
0	x_4	$\frac{31}{7}$	0	0	$-\frac{3}{7}$	1	$\frac{22}{7}$	-1	
$-z$		$-\frac{30}{7}$	0	0	$-\frac{5}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-M$	

由表 6-6 可得:相应线性规划问题的最优解为: $X^* = \left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}, 0, \frac{31}{7}, 0, 0\right)^T$

目标函数最优值为 $\max z = \frac{30}{7}$

由最终单纯形表得到变量间的关系:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7} \\ x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{9}{7} \\ -\frac{3}{7}x_3 + x_4 + \frac{22}{7}x_5 - x_6 = \frac{31}{7} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7} \\ 3x_2 - \frac{6}{7}x_3 + \frac{9}{7}x_5 = \frac{27}{7} \\ 2x_4 - 2x_6 - \frac{6}{7}x_3 + \frac{44}{7}x_5 = \frac{62}{7} \end{cases}$$

对于上面三式,将常数和常数项都分解成整数和非负真分数之和,得:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 \right) \\ 3x_2 - x_3 + x_5 - 3 = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 \right) \\ 2x_4 - 2x_6 - x_3 + 6x_5 - 8 = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 \right) \end{cases}$$

$\because x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N}$

$\therefore$ 上面三式左边均为整数, 故上面三式右边也均为整数且为非正.

$$\therefore \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 \right) \leq 0$$

即 $6 - x_3 - 2x_5 \leq 0$, 加入松弛变量 x_7 , 得

$$-x_3 - 2x_5 + x_7 = -6$$

将这个新的约束条件反映到表 6-6 的最终计算表中, 并用对偶单纯形法进行迭代, 得到表 6-7.

表 6-7

c_j			3	-1	0	0	0	-M	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_1	$\frac{13}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	0
-1	x_2	$\frac{9}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	0
0	x_4	$\frac{31}{7}$	0	0	$-\frac{3}{7}$	1	$\frac{22}{7}$	-1	0
0	x_7	-6	0	0	-1	0	[-2]	0	1
-z		$-\frac{30}{7}$	0	0	$-\frac{5}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	-M	0
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$
-1	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{14}$
0	x_4	-5	0	0	[-2]	1	0	-1	$\frac{11}{7}$
0	x_5	3	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
-z		-3	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-M	$-\frac{3}{14}$
3	x_1	1	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$
-1	x_2	$\frac{5}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{28}$
0	x_3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{14}$
0	x_5	$\frac{7}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{28}$
-z		$-\frac{7}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-M + \frac{1}{4}$	$-\frac{17}{28}$

依此类推, 继续迭代, 得整数解为 $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$

目标函数最优值 $\max z = 1$

6.4 某城市的消防总部将全市划分为 11 个防火区, 设有 4 个消防(救火)站. 图 6-3 表示各防火区域与消防站的位置, 其中①②③④表示消防站, 1、2、…、11 表示防火区域. 根据历史的资料证实, 各消防站可在事先规定的允许时间内对所负责的地区的火灾予以消灭. 图中虚线即表示各地区由哪个消防站负责(没有虚线连系, 就表示不负责). 现在总部提出: 可否减少消防站的数目, 仍能同样负责各地区的防火任务? 如果可以, 应当关闭哪个?

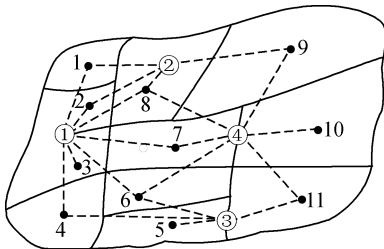


图 6-3

提示: 对每个消防站定义一个 0-1 变量 x_j , 令

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{当某防火区域可由第 } j \text{ 消防站负责时,} \\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时,} \end{cases} \quad j=1, 2, 3, 4$$

然后对每个防火区域列一个约束条件.

【解】 令

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{当某防火区域由第 } j \text{ 消防站负责时} \\ 0, & \text{当某防火区域不由第 } j \text{ 消防站负责时} \end{cases} \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

这样可得到原问题的数学模型

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^4 x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 & \text{①} \\ x_1 \geq 1 & \text{②} \\ x_1 + x_3 \geq 1 & \text{③} \\ x_3 \geq 1 & \text{④} \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 & \text{⑤} \\ x_1 + x_4 \geq 1 & \text{⑥} \\ x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 & \text{⑦} \\ x_2 + x_4 \geq 1 & \text{⑧} \\ x_4 \geq 1 & \text{⑨} \\ x_3 + x_4 \geq 1 & \text{⑩} \end{cases} \end{aligned}$$

由约束条件②④⑨可得

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

x_1, x_3, x_4 确定后, 只有两种情况:

① $x_2 = 0$, 解 $(1, 0, 1, 1)^T$ 为可行解

目标函数值 $z = 3$

② $x_2 = 1$, 解 $(1, 1, 1, 1)^T$ 为可行解

目标函数值 $z = 4$

比较①②得: 最优解 $X^* = (1, 0, 1, 1)^T$

目标函数的最优值 $\min z = 3$

故可以减少消防站的数目, 即可关闭消防站 2.

6.5 某大型企业每年需要进行多种类型的员工培训. 假设共有需要培训的需求(如技术类、管理类)为 6 种, 每种需求的最低培训人数为 $a_i, i=1, \dots, 6$, 可供选择的培训方式(如内部自行培训、外部与

高校合作培训)有5种,每种的最高培训人数为 $b_j, j=1, \dots, 5$.又设若选择了第1种培训方式,则第3种培训方式也要选择.记 x_{ij} 为第 i 种需求由第 j 种方式培训的人员数量, Z 为培训总费用.费用的构成包括固定费用和可变费用,第 j 种方式的固定培训费用为 h_j (与人数无关),与人数 x_{ij} 相应的可变费用为 C_{ij} (表示用第 j 种方式培训第 i 种需求类型的单位费用).如果以成本费用为优化目标,请建立该培训问题的结构优化模型.

$$\text{【解】} \quad \min z = \sum_{j=1}^5 h_j + \sum_{i=1}^6 c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \geq a_i & (i=1, \dots, 6) \\ \sum_{i=1}^6 x_{ij} \leq b_j & (j=1, \dots, 5) \\ x_{i1} \leq x_{i3} & (i=1, \dots, 6) \\ x_{ij} = 1 \text{ 或 } 0 \end{cases}$$

6.6 为了提高校园的安全性,某大学的保安部门决定在校园内部的几个位置安装紧急报警电话.校园的主要街道示意图如图6-4,其中①~⑧表示道路交叉口, $A \sim K$ 表示街道.现需决定在哪些地方安装,可使每条街道都有报警电话,并且总电话数目最少?请建立本问题的数学规划模型.

【解】 用 x_i 代表①~⑧路口是否安装的变量

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{在路口 } i \text{ 安装报警电话} \\ 0, & \text{在路口 } i \text{ 不安装报警电话} \end{cases}$$

$$\min z = \sum_{i=1}^8 x_i$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 & A \\ x_2 + x_3 \geq 1 & B \\ x_4 + x_5 \geq 1 & C \\ x_7 + x_8 \geq 1 & D \\ x_6 + x_7 \geq 1 & E \\ x_6 + x_7 \geq 1 & E \\ x_2 + x_6 \geq 1 & F \\ x_1 + x_6 \geq 1 & G \\ x_4 + x_7 \geq 1 & H \\ x_2 + x_4 \geq 1 & I \\ x_5 + x_8 \geq 1 & J \\ x_3 + x_5 \geq 1 & K \\ x_i = 1 \text{ 或 } 0 & (i=1, \dots, 8) \end{cases}$$

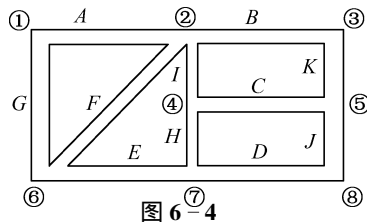


图 6-4

6.7 在有互相排斥的约束条件的问题中,如果约束条件是($\leq$)型的,我们用加以 $y_i M$ 项(y_i 是0-1变量, M 是很大的常数)的方法统一在一个问题中.如果约束条件是($\geq$)型的,我们将怎样利用 y_i 和 M 呢?

【解】 在互相排斥的约束问题中,如果约束条件是 $\geq$ 型,在 m 个约束条件右端分别减去 $y_i M, (i=$

$1, 2, \dots, m)$, 其中 M 是充分大的正数, y_i 为 0-1 变量 ($i = 1, 2, \dots, m$) 且

$$\sum_{i=1}^m y_i = m - 1$$

6.8 解 0-1 规划:

(1) $\min z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

(2) $\min z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

【解】 (1)

$\min z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$

s. t.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

①

②

③

通过观察可得到一可行解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 1)^T$ 目标函数值为 $z = 2$ ∴ 增加约束条件 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2$

④

将约束条件①②③按顺序排列, 得到表 6-8.

表 6-8

(x_1, x_2, x_3)	条件				目标函数值 z
	①	②	③	④	
(0, 0, 1)	✓	✓	✓	✓	2
(0, 1, 0)	×				
(0, 1, 1)	×				
(1, 0, 0)	×				
(1, 0, 1)	×				
(1, 1, 0)	×				
(1, 1, 1)	×				
(0, 0, 0)	✓	✓	×		

由表 6-8 可得:

原问题的最优解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 1)^T$ 目标函数最优值为 $\min z = 2$

(2)

$\min z = 5x_2 + 4x_4 + 3x_3 + 2x_1$

s. t.

$x_2 + x_4 + x_3 - 4x_1 \geq 0$

①

$4x_2 + 4x_4 + 2x_3 - 2x_1 \geq 4$

②

$x_2 + x_4 - x_3 + x_1 \geq 1$

③

$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ 或 } 1$

经观察可得到一可行解 $(x_2, x_4, x_3, x_1)^T = (0, 1, 0, 0)^T$ 目标函数值 $z = 4$.

故增加约束条件 $5x_2 + 4x_4 + 3x_3 + 2x_1 \leq 4$

①

将约束条件①①②③按顺序排列,得到表 6-9.

表 6-9

(x_2, x_4, x_3, x_1)	条件				z 值
	①	②	③	④	
(0,0,0,0)	✓	✓	×		
(0,0,0,1)	✓	×			
(0,0,1,0)	✓	✓	×		
(0,0,1,1)	×				
(0,1,0,0)	✓	✓	✓	✓	4
(0,1,0,1)	×				
(0,1,1,0)	×				
(0,1,1,1)	×				
(1,0,0,0)	×				
(1,0,0,1)	×				
(1,0,1,0)	×				
(1,0,1,1)	×				
(1,1,0,0)	×				
(1,1,0,1)	×				
(1,1,1,0)	×				
(1,1,1,1)	×				

由表 6-9 可得:

原问题的最优解 $(x_2, x_4, x_3, x_1)^T = (0, 1, 0, 0)^T$

目标函数的最优值为 $\min z = 4$

6.9 有 4 个工人,要指派他们分别完成 4 项工作,每人做各项工作所消耗的时间如表 6-10.

表 6-10

工人 \ 工作	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

问指派哪个人去完成哪项工作,可使总的消耗时间为最小?

【解】 系数矩阵 C 为

$$\begin{bmatrix} 15 & 18 & 21 & 24 \\ 19 & 23 & 22 & 18 \\ 26 & 17 & 16 & 19 \\ 19 & 21 & 23 & 17 \end{bmatrix}$$

① 从系数矩阵的每行元素减去该行的最小元素得

$$\begin{bmatrix} 15 & 18 & 21 & 24 \\ 19 & 23 & 22 & 18 \\ 26 & 17 & 16 & 19 \\ 19 & 21 & 23 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} -15 \\ -18 \\ -16 \\ -17 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} = B$$

② 从 B 的每列元素减去该列的最小元素得

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{matrix} -0 & -1 & -0 & -0 \end{matrix}$$

此时系数矩阵每行每列都有元素 0

下面进行试指派,以寻求最优解

先给 a_{11} 加圈,然后给 a_{24} 加圈,划掉 a_{44}

给 a_{32} 加圈,划掉 a_{33} 得

$$\begin{bmatrix} \textcircled{0} & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & \textcircled{0} \\ 10 & \textcircled{0} & \emptyset & 3 \\ 2 & 3 & 6 & \emptyset \end{bmatrix}$$

此时①的数目为 $3 < 4$,试指派不成功,转入下一步.

给第 4 行打 $\checkmark$ 号,给第 4 列打 $\checkmark$ 号,给第 2 行打 $\checkmark$ 号.将第 1,3 行画一横线,将第 4 列画一纵线,得

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & | \\ - & \textcircled{0} & - & 2 & - & 6 & - & 9 & - & | \\ & & & & & & & | & & \\ & & 1 & & 4 & & 4 & & \textcircled{0} & \checkmark \\ & & & & & & & & | & \\ - & 10 & - & \textcircled{0} & - & \emptyset & - & 3 & - & | \\ & & & & & & & & & | \\ & 2 & & 3 & & 6 & & \emptyset & & \checkmark \end{array}$$

变换矩阵得:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{0} & 2 & 6 & 10 \\ \emptyset & 3 & 3 & \textcircled{0} \\ 10 & \textcircled{0} & \emptyset & 4 \\ 1 & 2 & 5 & \emptyset \end{bmatrix}$$

给第 1,4 列打 $\checkmark$,对第 1,2,4 行打 $\checkmark$,给第 1,4 列画一纵线,第 3 行画一横线得:

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{c} | \\ \textcircled{0} \\ | \\ \emptyset \\ | \\ 10 \\ | \\ 1 \end{array} & & 2 & & 6 & & 10 \\
\begin{array}{c} | \\ \emptyset \\ | \\ 10 \\ | \\ 1 \end{array} & - & \begin{array}{c} | \\ \textcircled{0} \\ | \\ \emptyset \\ | \\ 2 \end{array} & - & \begin{array}{c} | \\ \emptyset \\ | \\ 4 \\ | \\ 5 \end{array} & - & \begin{array}{c} | \\ \textcircled{0} \\ | \\ \emptyset \\ | \\ \emptyset \end{array} \\
\begin{array}{c} | \\ \checkmark \end{array} & & & & & & \begin{array}{c} | \\ \checkmark \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

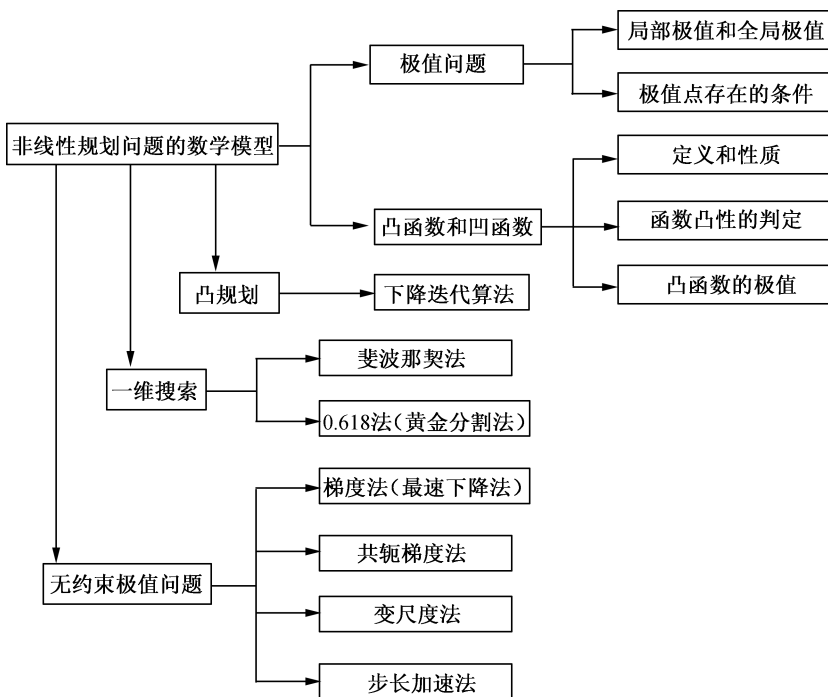
	A	B	C	D
甲	$\emptyset$	$\textcircled{0}$	4	10
乙	$\textcircled{0}$	1	1	1
丙	12	$\emptyset$	$\textcircled{0}$	6
丁	1	$\emptyset$	3	$\textcircled{0}$

甲—B, 乙—A, 丙—C, 丁—D

所消耗的总时间为: $18+19+16+17=70$.

第7章 无约束问题

知识结构图



学习要求

1. 掌握梯度的概念.
2. 掌握凸函数和凹函数的定义.
3. 掌握二次型的类型.
4. 理解凸规划的定义.
5. 掌握斐波那契法和黄金分割法.
6. 掌握最速下降法,共轭梯度法,变尺度法,步长加速法.

重点、难点解答

1. 一般说来,解非线性规划问题要比解线性规划问题困难得多.而且,也不像线性规划有单纯形法这一通用方法.非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法,各个方法都有自己特定的适用范围.
 2. 在解无约束极值问题时常用迭代法,迭代法一般分为两大类:一类要用到函数的一阶导数和(或)二阶导数,由于用到了函数的解析性质,故称为解析法.另一类在迭代过程中仅用到函数值,而不要
- 求函数的解析性质,这类方法称为直接法.一般说来,直接法的收敛速度较慢,只是在变量较少时才适

用.但是直接法的迭代步骤简单,特别是当目标函数的解析表达式十分复杂,甚至写不出具体表达式时,它们的导数很难求得,或者根本不存在,这时解析法就不起作用了.

典型例题精解

1. 试计算以下各函数的梯度和 Hesse 矩阵.

$$(1) f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$(2) f(\mathbf{X}) = \ln(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$(3) f(\mathbf{X}) = 3x_1 x_2^2 + 4e^{x_1 x_2}$$

$$(4) f(\mathbf{X}) = x_1^2 + \ln(x_1 x_2)$$

【解】 (1) $\nabla f(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)^T$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \nabla f(\mathbf{X}) = \left(\frac{2x_1 + x_2}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}, \frac{x_1 + 2x_2}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} \right)^T$$

$$H(x) = \frac{1}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^2} \begin{bmatrix} -2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 & -x_1^2 - 4x_1 x_2 - x_2^2 \\ -x_1^2 - 4x_1 x_2 - x_2^2 & x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \nabla f(\mathbf{X}) = (3x_2^2 + 4x_2 e^{x_1 x_2}, 6x_1 x_2 + 4x_1 e^{x_1 x_2})^T$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4x_2^2 e^{x_1 x_2} & 6x_2 + 4e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) \\ 6x_2 + 4e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) & 6x_1 + 4x_1^2 e^{x_1 x_2} \end{bmatrix}$$

$$(4) \nabla f(\mathbf{X}) = \left(x_2 x_1^2^{-1} + \frac{1}{x_1}, x_1^2 \ln x_1 + \frac{1}{x_2} \right)^T$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2-2} - \frac{1}{x_2} & x_2 x_1^{x_2-2} \ln x_1 + x_1^{x_2-1} \\ x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2-1} & x_1^2 (\ln x_1)^2 - \frac{1}{x_2} \end{bmatrix}$$

2. 已知 $f(x) = 4 - 7x + x^2$, 要求:

(1) 计算该函数在 $x_0 = 2$ 点的值;

(2) 利用 $f(x)$ 的导数及 (1) 的结果求 $f(x)$ 在 $x = 4$ 这一点的值.

【解】 (1) $f(x_0 = 2) = 4 - 7 \times 2 + 4 = -6$

(2) $f'(x) = 2x - 7, f''(x) = 2, f'''(x) = 0$

$$f = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

3. $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, 已知 $X^* = (x_1, x_2) = (2, 3)$ 时, $f(x) = 19$, 求 $f(x)$ 在 $x = (3, 5)$ 的值.

$$\text{【解】 } f(x) = f(x^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^* \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^* \Delta x_2 + \frac{1}{2} \Delta x^T [H(x)] \Delta x$$

$$\therefore \Delta x^T = (1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 2$$

$$\therefore H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

由此

$$f(X) = 19 + 7 \times 1 + 8 \times 2 + \frac{1}{2} (1, 2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 49$$

4. 用斐波那契法求函数:

$$f(x) = -3x^2 + 21.6x + 1$$

在区间 $[0, 25]$ 上的极大值点, 要求缩短后的区间长度不小于原区间长度的 8%.

【解】 $f(x)$ 为严格凹函数, 因 $\delta = 0.08$, $F_n = \frac{1}{\delta} = 12.5$, 由书中表 6-1 查得 $n = 6$, 再由公式 (6.33) 计

算得

$$t_1 = b_0 + \frac{F_5}{F_6} (a_0 - b_0) = 25 + \frac{8}{13} (0 - 25) = 9.6154$$

$$t_1^1 = a_0 + \frac{F_5}{F_6} (b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} (25 - 0) = 15.3846$$

$$f(t_1) = -68.6715 > f(t_1^1) = -376.7504$$

故取

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 15.3846, \quad t_2^1 = 9.6154, \quad t_2 = b_1 + \frac{F_4}{F_5} (a_1 - b_1) = 5.7692$$

因

$$f(t_2) = 25.7624 > f(t_2^1)$$

故取

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 9.6154, \quad t_3^1 = 5.7692, \quad t_3 = b_2 + \frac{F_3}{F_4} (a_2 - b_2) = 3.8462$$

因

$$f(t_3) = 39.698 > f(t_3^1)$$

故取

$$a_3 = 0, \quad b_3 = 5.7692, \quad t_4^1 = 3.8462, \quad t_4 = b_3 + \frac{F_2}{F_3} (a_3 - b_3) = 1.9231$$

因

$$f(t_4) = 31.444 < f(t_4^1)$$

故取

$$a_4 = 1.9231, \quad b_4 = 5.7692, \quad t_5 = 1.9231$$

并令 $\varepsilon = 0.01$

$$t'_5 = a_4 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) (b_4 - a_4) = 3.850$$

因

$$f'(t'_5) = 39.6924 > f'(t_5)$$

故取

$$a_5 = 3.85, \quad b_5 = 5.7692$$

因

$$f'(t'_5) < f'(t_3)$$

故 $t_3 = 3.8642$ 为近似最优点.

5. 用步长加速法求下述函数的极小点:

$$\min f(\mathbf{X}) = 3x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 8x_2$$

取初始点为 $\mathbf{X}^{(0)} = (1, 1)^T$, 其初始步 $\Delta = (0.5, 0.5)^T$.

【解】 题中给定初始点 $\mathbf{X}^{(0)} = (1, 1)^T$, 初始步长 $\Delta = (0.5, 0.5)^T$, 由此出发进行探索. 在有

$$\mathbf{X}_1^{(1)} = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$f(1.5, 1) = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 - 12 \times \frac{3}{2} - 8 \times 1 = -18.25 < f(1, 1)$$

$$\mathbf{X}_2^{(1)} = 1 + 0.5 = 1.5, \quad f(1.5, 1.5) = -21.0 < f(1.5, 1)$$

得新的基点

$$\mathbf{X}^{(1)} = (1.5, 1.5)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(1)}) = -21.0$$

由 $\mathbf{X}^{(1)}$ 和 $\mathbf{X}^{(0)}$ 确定第一模矢, 并求得第一模矢的初始临时矢点.

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(0)} + 2(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}) = 2\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)} = (2.0, 2.0)^T$$

$$f(\mathbf{X}^{(2)}) = -24.0$$

再在 $\mathbf{X}^{(2)}$ 附近进行同上类似的探索, 因有

$$\mathbf{X}_1^{(3)} = 2.0 + 0.5 = 2.5, \quad f(2.5, 2) = -23.25 > f(2, 2)$$

$$\mathbf{X}_1^{(3)} = 2.0 - 0.5 = 1.5, \quad f(1.5, 2) = -23.25 > f(2, 2)$$

$$\mathbf{X}_2^{(3)} = 2.0 + 0.5 = 2.5, \quad f(2.0, 2.5) = -25.75 < f(2, 2)$$

又得新的基点

$$\mathbf{X}^{(3)} = (2.0, 2.5)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(3)}) = -25.75$$

由 $\mathbf{X}^{(3)}$ 和 $\mathbf{X}^{(1)}$ 确定第二模矢, 并求得第三模矢的初始临时矢点.

$$\mathbf{X}^{(4)} = 2\mathbf{X}^{(3)} - \mathbf{X}^{(1)} = (2.5, 3.5)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(4)}) = -27$$

在 $\mathbf{X}^{(4)}$ 附近探索, 有

$$\mathbf{X}_1^{(5)} = 2.5 + 0.5 = 3.0, \quad f(3.0, 3.5) = -24.75 > f(2, 2.5)$$

$$\mathbf{X}_1^{(5)} = 2.5 - 0.5 = 2.0, \quad f(2.0, 3.5) = -27.75 < f(2, 2.5)$$

$$\mathbf{X}_2^{(5)} = 3.5 + 0.5 = 4.0, \quad f(2.0, 4.0) = -28.0 < f(2, 3.5)$$

故又得新的基点

$$\mathbf{X}^{(5)} = (2.0, 4.0)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(5)}) = -28.0$$

由 $\mathbf{X}^{(5)}$ 和 $\mathbf{X}^{(3)}$ 确定第三模矢, 求得该模矢的初始临时点

$$\mathbf{X}^{(6)} = 2\mathbf{X}^{(5)} - \mathbf{X}^{(3)} = (2.0, 5.5)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(6)}) = -25.75$$

再在 $\mathbf{X}^{(6)}$ 的附近探索, 因有

$$\mathbf{X}_1^{(7)} = 2.0 + 0.5 = 2.5, \quad f(2.5, 5.5) = -25 > f(2, 4)$$

$$\mathbf{X}_1^{(7)} = 2.0 - 0.5 = 1.5, \quad f(1.5, 5.5) = -25 > f(2, 4)$$

$$\mathbf{X}_2^{(7)} = 5.5 + 0.5 = 6.0, \quad f(2.0, 6.0) = -24 > f(2, 4)$$

$$\mathbf{X}_2^{(7)} = 5.5 - 0.5 = 5.0, \quad f(2.0, 5.0) = -27 > f(2, 4)$$

可以回来在 $\mathbf{X}^{(5)}$ 附近以 $\frac{\Delta}{2}$ 的步长探索, 最后结果 $\mathbf{X}^{(5)} = (2.0, 4.0)^T$ 为最优解.

6. 用变尺度法求二次函数

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$$

的极小点, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

【解】从 $X^{(0)} = (1, 1)^T$ 开始, 并取

$$\bar{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)^T$$

$$\nabla f(X^{(0)}) = (1+1, 1+2)^T = (2, 3)^T$$

$$P^{(0)} = -\bar{H}^{(0)} \nabla f(X^{(0)}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

利用一维搜索, 即 $\min f(X^{(0)} + \lambda P^{(0)})$

$$\text{而 } X^{(0)} + \lambda P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 1-3\lambda \end{pmatrix}$$

则 $\min f(X^{(0)} + \lambda P^{(0)})$

$$= \min f(1-2\lambda, 1-3\lambda)^T$$

$$= \frac{1}{2}(1-2\lambda, 1-3\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ 1-3\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{2} [(1-2\lambda)^2 + 2(1-2\lambda)(1-3\lambda) + 2(1-3\lambda)^2] \right\}$$

由对 λ 的导数为 0, 即

$$2(1-2\lambda)(-2) + 2 \times (-2)(1-3\lambda) + 2(1-2\lambda)(-3) + 4(1-3\lambda)(-3) = 0$$

即得驻点 $\lambda_0 = \frac{13}{34}$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_0 P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{34} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{34} \\ -\frac{15}{34} \end{pmatrix}^T$$

$$\nabla f(X^{(1)}) = \left(\frac{8}{34} - \frac{5}{34}, \frac{8}{34} - \frac{10}{34} \right)^T = \left(\frac{3}{34}, -\frac{2}{34} \right)^T$$

$$\Delta X^{(0)} < X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{34} \\ -\frac{15}{34} \end{pmatrix}^T - (1, 1)^T > \begin{pmatrix} -\frac{26}{34} \\ -\frac{49}{34} \end{pmatrix}^T$$

$$\Delta G^{(0)} = \nabla f(X^{(1)}) - \nabla f(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{34} \\ -\frac{2}{34} \end{pmatrix}^T - (2, 3)^T = \begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix}^T$$

$$\bar{H}^{(1)} = \bar{H}^{(0)} + \frac{\Delta X^{(0)} (\Delta X^{(0)})^T}{(\Delta G^{(0)})^T \Delta X^{(0)}} - \frac{\bar{H}^{(0)} \Delta G^{(0)} (\Delta G^{(0)})^T \bar{H}^{(0)}}{(\Delta G^{(0)})^T \bar{H}^{(0)} \Delta G^{(0)}}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(2, 3)^T (2, 3)}{\begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{26}{34} \\ -\frac{49}{34} \end{pmatrix}} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{65}{34} \\ -\frac{104}{34} \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{6786}{34^2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \frac{34^2}{65^2 + 104^2} \cdot \frac{1}{34^2} \begin{pmatrix} 65^2 & 65 \times 104 \\ 104 \times 65 & 104^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{6786}{34^2} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{65^2 + 104^2} \begin{pmatrix} 65^2 & 65 \times 104 \\ 104 \times 65 & 104^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = -\bar{\mathbf{H}}^{(1)} \quad \nabla f(\mathbf{X}^{(1)}) = \left(-\frac{8 \times 13}{34^2}, \frac{15 \times 13}{34^2} \right)^T$$

再由一维搜索

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{X}^{(1)} + \lambda \mathbf{P}^{(1)}) = \min_{\lambda} f\left(\left(\frac{8}{34}, -\frac{15}{34} \right)^T + \lambda \left(-\frac{8 \times 13}{34^2}, \frac{15 \times 13}{34^2} \right)^T \right)$$

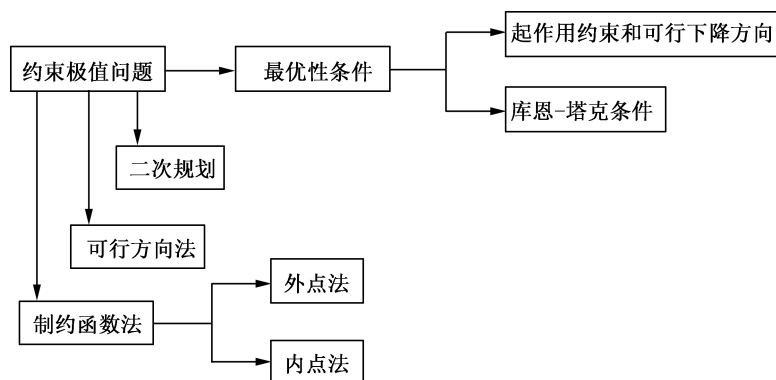
得 $\lambda_1 = \frac{34}{13}$

从而

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)} &= \mathbf{X}^{(1)} + \lambda_1 \mathbf{P}^{(1)} + \left(\frac{8}{34}, -\frac{15}{34} \right)^T + \lambda_1 \mathbf{P}^{(1)} \\ &= \left(\frac{8}{34}, -\frac{15}{34} \right)^T + \frac{34}{13} \left(-\frac{8 \times 13}{34^2}, \frac{15 \times 13}{34^2} \right) \\ &= (0, 0)^T \\ \nabla f(\mathbf{X}^{(2)}) &= (0, 0)^T \end{aligned}$$

第 8 章 约束极值问题

知识结构图



学习要求

1. 掌握库恩—塔克条件.
2. 掌握二次规划定义及其解法.
3. 会用可行方向法解非线性规划问题.
4. 掌握求解非线性规划问题的制约函数法.

重点、难点解答

带有约束条件的极值问题称为约束极值问题,也叫规划问题.

非线性规划的一般形式为

$$\begin{cases} \min f(X) \\ h_i(X) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ g_j(X) \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l) \end{cases}$$

求解约束极值问题要比求解无约束极值问题困难得多,对极小化问题来说,除了要使目标函数在每次迭代有所下降外,还要时刻注意解的可行性问题(某些算法除外),这就给寻优工作带来了很大的困难,为简化工作,可采用以下方法:将约束问题化为无约束问题,将非线性规划问题化为线性规划问题,以及能将复杂问题变换为较简单问题的其他方法.

课后习题全解

8.1 在某一试验中变更条件 x_i 四次,测得相应的结果 y_i 示于表 8-1,试为这一试验拟合一条直线,使在最小二乘意义上最好地反映这项试验的结果(仅要求写出数学模型).

表 8-1

x_i	2	4	6	8
y_i	1	3	5	6

【解】 设直线为 $y = a_0 + ax$, 则有:

$$\begin{cases} \min z = (a_0 + 2a - 1)^2 + (a_0 + 4a - 3)^2 + (a_0 + 6a - 5)^2 + (a_0 + 8a - 6)^2 \\ \frac{\partial z}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial a} = 0 \end{cases}$$

8.2 有一线性方程组如下

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

现欲用无约束极小化方法求解, 试建立数学模型并说明计算原理.

【解】 (1) 建立数学模型

$$\min f(\mathbf{X}) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2)^2 + (3x_1 - 2x_2 + x_3 - 7)^2 + (x_1 + x_2 - x_3 - 1)^2$$

(2) 计算原理

梯度法(最速下降法)

① 给定初始近似点 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不妨为 $(0, 0, 0)$, 精度 $\varepsilon > 0$, 不妨为 $\varepsilon = 0.01$, 若

$$\|\nabla f(\mathbf{X}^{(0)})\|^2 \leq \varepsilon$$

则 $\mathbf{X}^{(0)}$ 即为近似极小点.

② 若 $\|\nabla f(\mathbf{X}^{(0)})\|^2 > \varepsilon$, 求步长 λ_0 并计算

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} - \lambda_0 \nabla f(\mathbf{X}^{(0)})$$

步长求法用近似最佳步长.

③ 一般地, 若 $\|\nabla f(\mathbf{X}^{(k)})\|^2 \leq \varepsilon$, 则 $\mathbf{X}^{(k)}$ 即为所求的近似解; 若

$$\|\nabla f(\mathbf{X}^{(k)})\|^2 > \varepsilon$$

则求步长 λ_k 并确定下一个近似点

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\mathbf{X}^{(k)})$$

如此继续, 直至达到要求的精度为止.

近似最佳步长求法

$$f(\lambda) = f(\mathbf{X}^{(k)} - \lambda \nabla f(\mathbf{X}^{(k)}))$$

$$= f(\mathbf{X}^{(k)}) - \nabla f(\mathbf{X}^{(k)})^T \lambda \nabla f(\mathbf{X}^{(k)}) + \frac{1}{2} \lambda \nabla f(\mathbf{X}^{(k)})^T H(\mathbf{X}^{(k)}) \lambda \nabla f(\mathbf{X}^{(k)})$$

由 $\frac{df}{d\lambda} = 0$, 求出步长 λ .

8.3 试判定下述非线性规划是否为凸规划:

$$(1) \begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + 8 \\ x_1^2 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ 5x_1^2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 (1)

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + 8 \\ g_1(\mathbf{X}) = x_1^2 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$f(\mathbf{X}), g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X})$ 的海赛矩阵的行列式:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|g_1| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g_1(\mathbf{X})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|g_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g_2(\mathbf{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_2(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 g_2(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g_2(\mathbf{X})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

知 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数, $g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X})$ 为凹函数, 所以是一个凸规划问题.

(2)

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 \\ g'_1(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \Leftrightarrow g_1(\mathbf{X}) = -(x_1^2 + x_2^2) + 4 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = 5x_1^2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

同上有 $f(\mathbf{X}), g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X})$ 的海赛矩阵的行列式

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 14 > 0$$

$|g_1|=0, |g_2|=0$ 是凸规划问题.

8.4 试用斐波那契法求函数

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

在区间 $[0, 10]$ 上的极小点, 要求缩短后的区间长度不大于原区间长度的8%.

【解】 函数求值次数 $n=8$; 最终区间为

$$[a_7, b_7] = [2.942, 3.236]$$

近似极小点为 $t=2.947$

近似极小值为 $f(2.947) = 2.947^2 - 6 \times 2.947 + 2 = -6.997$

$$\text{由 } \frac{df}{dx} = 2x - 3 = 0, \text{ 得 } x = \frac{3}{2}$$

故精确解为 $t^* = \frac{3}{2}$, $f(t^*) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{2} + 2 = -\frac{19}{4}$

8.5 试用 0.618 法重做习题 8.4, 并将计算结果与用斐波那契法所得计算结果进行比较.

【解】 函数求值次数 $n=9$, 最终区间为

$$[a_8, b_8] = [2.918, 3.131]$$

近似极小点为 $t=3.05$

近似极小值 $f(3.05) = 3.05^2 - 6 \times 3.05 + 2 = -6.998$

8.6 试用最速下降法求解

$$\min f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

选初始点 $\mathbf{X}^{(0)} = (2, -2, 1)^T$, 要求做三次迭代, 并验证相邻两步的搜索方向正交.

$$\text{【解】 } \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^T = (2x_1, 2x_2, 2x_3)^T$$

计算结果如表 8-2.

表 8-2

迭代次数 k	λ_k	$\mathbf{X}^{(k)}$	$\nabla f(\mathbf{X}^{(k)})$
0	$\frac{3}{8}$	$(2, -2, 1)$	$(4, -4, 4)$
1	$\frac{3}{10}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(1, -1, -2)$
2	$\frac{3}{8}$	$\left(\frac{2}{10}, -\frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{4}{10}, -\frac{4}{10}, \frac{4}{10}\right)$
3		$\left(\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{20}\right)$	$\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{2}{10}\right)$

由 $(4, -4, 4), (1, -1, -2), \left(\frac{4}{10}, -\frac{4}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{2}{10}\right)$ 可知相邻两步的搜索方向正交.

8.7 试用最速下降法求函数

$$f(\mathbf{X}) = -(x_1 - 2)^2 - 2x_2^2$$

的极大点. 先以 $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0)^T$ 为初始点进行计算, 求出极大点; 再以 $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 1)^T$ 为初始点进行两次迭代. 最后比较从上述两个不同初始点出发的寻优过程.

【解】 求 $f(\mathbf{X}) = -(x_1 - 2)^2 - 2x_2^2$ 的极大点, 即求 $g(\mathbf{X}) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2$ 的极小点.

(1) 取初始点 $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0)^T$, 取精度 $\varepsilon = 0.1$

$$\nabla g(X) = [2(x_1 - 2), 4x_2]^T, \quad \nabla g(X^{(0)}) = (-4, 0)^T$$

$$\|\nabla g(X^{(0)})\|^2 = (\sqrt{(-4)^2 + 0^2})^2 = 16 > \varepsilon$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = \frac{\nabla g(X^{(0)})^T \nabla g(X^{(0)})}{\nabla g(X^{(0)})^T H(X^{(0)}) \nabla g(X^{(0)})} = \frac{(-4, 0) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{(-4, 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \lambda_0 \nabla g(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(X^{(1)}) = [2(2-2), 4 \times 0]^T = (0, 0)^T$$

即 $X^{(1)}$ 即为极小点.

$\therefore (2, 0)$ 为 $f(X)$ 的极大点.

(2) 取初始点 $X^{(0)} = (0, 1)^T$, 取精度 $\varepsilon = 0.1$, 同上方法进行两次迭代有:

$$\text{两次步长 } \lambda_0 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

两次迭代结果

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

比较: 对于目标函数的等值线为椭圆的问题来说, 椭圆的圆心即为最小值, 负梯度方向指向圆心, 但初值点与圆心在同一水平直线上时, 收敛很快, 即尽量使搜索路径呈现较少的直角锯齿状.

8.8 试用牛顿法重解习题 8.6.

$$\text{【解】 } \min f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad X^{(0)} = (2, -2, 1)^T$$

$$\nabla f(X) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)^T, \quad \nabla f(X^{(0)}) = (4, -4, 2)^T$$

$$\therefore H(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore H(X^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = X^{(0)} - H(X^{(0)})^{-1} \nabla f(X^{(0)})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.9 试用牛顿法求解

$$\max f(X) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$$

取初始点 $X^{(0)} = (4, 0)^T$, 用最佳步长进行. 然后采用固定步长 $\lambda = 1$, 观察迭代情况, 并加以说明.

【解】 令 $f(X) - 1/F(X) = 1/(x_1^2 + x_2^2 + 2)$, 要求 $\max f(X)$, 即求 $\min F(X)$. 仿照 8.8 题的解法, 由题意可知,

$$X^{(0)} = (4, 0)^T, \nabla F(X) = (2x_1, 2x_2)^T$$

$$\text{解得 } \nabla F(X) = (8, 0)^T, H(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, H(X^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } X = X^{(0)} - H(X^{(0)})^{-1} \nabla F(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即极大点为 $X^* = (0, 0)^T$, $f(X^*) = 1/(0^2 + 0^2 + 2) = 1/2$.

由以上步骤可知步长 $\lambda = 1$. 因此当采用固定步长 $\lambda = 1$ 时, 迭代情况与采用最佳步长情形一致. 由于 $F(X)$ 是二次函数, 并且 $H(X^{(0)})$ 为常数正定矩阵, 因此从任一点出发只要一步就可求出 $\min F(X)$, 即 $\max f(X)$.

8.10 试用共轭梯度法求二次函数

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X$$

的极小点, 此处

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{【解】 } \because A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X = \frac{1}{2} (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

$$\nabla f(X) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^T = [x_1 + x_2, x_1 + 2x_2]^T$$

现从 $X^{(0)} = (1, 1)^T$ 开始

$$\nabla f(X^{(0)}) = (2, 3)^T$$

$$P^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = (-2, -3)^T$$

$$\lambda_0 = -\frac{\nabla f(X^{(0)})^T P^{(0)}}{(P^{(0)})^T A P^{(0)}} = -\frac{(2, 3) \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}}{(-2, -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}} = \frac{13}{34}$$

于是

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_0 P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{34} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \left(\frac{8}{34}, -\frac{5}{34} \right)^T$$

$$\nabla f(X^{(1)}) = \left(\frac{8}{34} - \frac{5}{34}, \frac{8}{34} - \frac{10}{34} \right)^T = \left(\frac{3}{34}, -\frac{2}{34} \right)^T$$

$$\beta_0 = \frac{\nabla f(\mathbf{X}^{(1)})^T \nabla f(\mathbf{X}^{(1)})}{\nabla f(\mathbf{X}^{(0)})^T \nabla f(\mathbf{X}^{(0)})} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{34}, -\frac{2}{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{34} \\ -\frac{2}{34} \end{pmatrix}}{(2,3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{34^2}$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = -\nabla f(\mathbf{X}^{(1)}) + \beta_0 \mathbf{P}^{(0)} = -\begin{pmatrix} \frac{3}{34} \\ -\frac{2}{34} \end{pmatrix} + \frac{1}{34^2} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{34^2} (-104, 65)^T$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\nabla f(\mathbf{X}^{(1)})^T \mathbf{P}^{(1)}}{(\mathbf{P}^{(1)})^T \mathbf{A} \mathbf{P}^{(1)}} \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{34}, -\frac{2}{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -104 & 65 \\ 34^2 & 34^2 \end{pmatrix}^T}{\begin{pmatrix} -104 & 65 \\ 34^2 & 34^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -104 & 65 \\ 34^2 & 34^2 \end{pmatrix}^T} = -\frac{\frac{-3 \times 104 - 2 \times 65}{34^3}}{\frac{-39 \times (-104) + 26 \times 65}{34^4}} = \frac{34}{13} \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \mathbf{X}^{(1)} + \lambda_1 \mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{34}, -\frac{5}{34} \end{pmatrix} + \frac{34}{13} \begin{pmatrix} -104 \\ 65 \\ 34^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故得到极小值点

$$\mathbf{X}^{(2)} = (0, 0)^T$$

8.11 令 $\mathbf{X}^{(i)} (i=1, 2, \dots, n)$ 为一组 $\mathbf{A}$ 共轭向量 (假定为列向量), $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 对称正定阵, 试证

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{X}^{(i)} (\mathbf{X}^{(i)})^T}{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A} \mathbf{X}^{(i)}}$$

【证明】 由于 $\mathbf{X}^{(i)} (i=1, 2, \dots, n)$ 为 $\mathbf{A}$ 共轭, 故它们线性独立. 设 $\mathbf{Y}$ 为 E^n 中的任一向量, 则存在 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{X}^{(i)}$$

用 $\mathbf{A}$ 左乘上式, 得 $\mathbf{A}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)} = a_1 \mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)} + a_2 \mathbf{A}\mathbf{X}^{(2)} + \dots + a_n \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)}$

分别用 $\mathbf{X}^{(i)} (i=1, 2, \dots, n)$ 左乘上式, 并考虑到共轭关系, 则有

$$(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{Y} = a_i (\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

从而

$$a_i = \frac{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{Y}}{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots$$

$$\text{令 } \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{X}^{(i)} (\mathbf{X}^{(i)})^T}{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)}}$$

$$\begin{aligned} \text{用 } \mathbf{A}\mathbf{Y} \text{ 右乘上式, 得 } \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{Y} &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{X}^{(i)} (\mathbf{X}^{(i)})^T}{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)}} \right] \mathbf{A}\mathbf{Y} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{Y}}{(\mathbf{X}^{(i)})^T \mathbf{A}\mathbf{X}^{(i)}} \mathbf{X}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{Y} \end{aligned}$$

故 $BA=E$ (单位矩阵)

$$\text{即 } A^{-1} = B = \sum_{i=1}^n \frac{X^{(i)}(X^{(i)})^T}{(X^{(i)})^T A X^{(i)}}$$

8.12 试用变尺度法求解

$$\min f(X) = (x_1 - 2)^3 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

取初始点 $X^{(0)} = (0.00, 3.00)^T$, 要求近似极小点处梯度的模不大于 0.5.

【解】 $\min f(X) = (x_1 - 2)^3 + (x_1 - 2x_2)^2$

$$\text{取 } \bar{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 3.00 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(X) = [3(x_1 - 2), -4(x_1 - 2x_2)]^T$$

$$\nabla f(X^{(0)}) = (-6, 24)^T$$

显然 $\|\nabla f(X^{(0)})\|^2 > \varepsilon$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_0 P^{(0)} = X^{(0)} + \lambda_0 [-\bar{H}^{(0)} \nabla f(X^{(0)})]$$

$$= \begin{pmatrix} 0.00 \\ 3.00 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.00 + 6\lambda_0 \\ 3.00 - 24\lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$f(X^{(1)}) = (6\lambda_0 - 2)^3 + [6\lambda_0 - 2(3.00 - 24\lambda_0)]^2$$

$$\text{令 } \frac{df(X^{(1)})}{d\lambda_0} = 0, \text{ 得 } \lambda_0 = \frac{19}{165}$$

$$\text{故 } X^{(1)} = [0.00 + 6\lambda_0, 3.00 - 24\lambda_0]^T = (0.69, 0.24)^T$$

$$\|\nabla f(X^{(1)})\|^2 = 16.1505 > 0.5$$

继续迭代

$$\Delta X^{(0)} = X^{(1)} - X^{(0)} = (0.69, 0.24)^T - (0.00, 3.00)^T = (0.69, -2.76)^T$$

$$f(X^{(1)}) = -2.20, \quad \nabla f(X^{(1)}) = (-3.93, -0.84)^T$$

$$\Delta G^{(0)} = \nabla f(X^{(1)}) - \nabla f(X^{(0)}) = (2.07, -24.84)^T$$

可得

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(1)} &= \bar{H}^{(0)} + \frac{\Delta X^{(0)}(\Delta X^{(0)})^T}{(\Delta G^{(0)})^T \Delta X^{(0)}} - \frac{\bar{H}^{(0)} \Delta G^{(0)}(\Delta G^{(0)})^T \bar{H}^{(0)}}{(\Delta G^{(0)})^T \bar{H}^{(0)} \Delta G^{(0)}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(0.69, -2.76)^T (0.69, -2.76)}{(2.07, -24.84) (0.69, -2.76)^T} \\ &\quad - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (2.07, -24.84)^T (2.07, -24.84) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(2.07, -24.84) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (2.07, -24.84)^T} \\ &= \begin{pmatrix} 1.00 & -0.06 \\ -0.06 & 0.12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \lambda \bar{H}^{(1)} \nabla f(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.69 \\ 0.24 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1.00 & -0.06 \\ -0.06 & 0.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.93 \\ -0.84 \end{pmatrix}$$

如上求最优步长, 可得

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.69 \\ 0.24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3.8796 \\ 0.135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.69 + 3.8796\lambda \\ 0.24 - 0.135\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\min f(X^{(2)}) &= (0.69+3.8796\lambda-2)^3 + (0.69+3.8796\lambda-2 \times 0.24+0.27\lambda)^2 \\ &= (3.8796\lambda-1.31)^3 + (4.1496\lambda+0.21)^2\end{aligned}$$

得 $\lambda_1 = -\frac{5}{96}$, 循环以上步骤.

8.13 试以 $X^{(0)} = (0, 0)^T$ 为初始点, 使用

(1) 最速下降法(迭代4次);

(2) 牛顿法;

(3) 变尺度法.

求解无约束极值问题 $\min f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2$, 并绘图表示使用上述各方法的寻优过程.

【解】 (1) 用最速下降法:

$$X^{(0)} = (0, 0)^T, \quad \lambda_0 = 1$$

$$X^{(1)} = (-1, 1)^T, \quad \lambda_1 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(2)} = (-0.8, 1.2)^T, \quad \lambda_2 = 1$$

$$X^{(3)} = (-1, 1.4)^T, \quad \lambda_3 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(4)} = (-0.96, 1.44)^T$$

(2) 牛顿法:

$$X^{(0)} = (0, 0)^T, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

得极小点

$$X^{(1)} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)^T$$

(3) 变尺度法:

$$X^{(0)} = (0, 0)^T, P^{(0)} = (-1, 1)^T, \quad \lambda_0 = 1$$

$$X^{(1)} = (-1, 1)^T, \quad \beta_0 = 1, \quad P^{(1)} = (0, 2)^T, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

得极小点

$$X^{(2)} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)^T$$

8.14 试用步长加速法(模矢法)求下述函数

$$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2$$

的极小点, 初始点 $X^{(0)} = (3, 1)^T$, 步长

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

并绘图表示整个迭代过程.

【解】 第一步:

$$f(X^{(0)}) = -7$$

$$f(X^{(0)} + \Delta_1) = f[(3.5, 1)^T] = -6.75 > f(X^{(0)})$$

$$f(X^{(0)} - \Delta_1) = f[(2.5, 1)^T] = -6.75 > f(X^{(0)})$$

$$\therefore T_{11} = X^{(0)} = (3, 1)^T$$

$$f(T_{11} + \Delta_2) = f[(3, 1.5)^T] = -7.5 < f(X^{(0)})$$

$$\therefore T_{12} = (3, 1.5)^T = X^{(1)}$$

$$\text{且 } f(X^{(1)}) = -7.5$$

第二步:

$$T_{20} = X^{(0)} + 2(X^{(1)} - X^{(0)}) = (3, 2)^T$$

$$\text{且 } f(T_{20}) = -7$$

$$f(T_{20} + \Delta_1) = f[(3.5, 2)^T] = -7.75 < f(T_{20})$$

$$\therefore T_{21} = (3.5, 2)^T$$

$$f(T_{21} + \Delta_2) = f[(3.5, 2.5)^T] = -6.75 > f(T_{20})$$

$$f(T_{21} - \Delta_2) = f[(3.5, 1.5)^T] = -7.75 < f(T_{20})$$

$$\therefore T_{22} = (3.5, 1.5)^T = X^{(2)}$$

$$\text{且 } f(X^{(2)}) = -7.75$$

第三步:

$$T_{30} = X^{(1)} + 2(X^{(2)} - X^{(1)}) = (4, 1.5)^T$$

$$\text{且 } f(T_{30}) = -7.5$$

$$f(T_{30} + \Delta_1) = f[(4.5, 1.5)^T] = -6.75 > f(T_{30})$$

$$f(T_{30} - \Delta_1) = f[(3.5, 1.5)^T] = -7.75 < f(T_{30})$$

$$\therefore T_{31} = (3.5, 1.5)^T$$

$$f(T_{31} + \Delta_2) = f[(3.5, 2)^T] = -7.75 < f(T_{30})$$

$$\therefore T_{32} = (3.5, 2)^T = X^{(3)}$$

$$\text{且 } f(X^{(3)}) = -7.75$$

第四步:

$$T_{40} = X^{(2)} + 2(X^{(3)} - X^{(2)}) = (3.5, 2.5)^T$$

$$\text{且 } f(T_{40}) = -7$$

$$f(T_{40} + \Delta_1) = f[(4, 2.5)^T] = -7.5 < f(T_{40})$$

$$\therefore T_{41} = (4, 2.5)^T$$

$$f(T_{41} + \Delta_2) = f[(4, 3)^T] = -6 > f(T_{40})$$

$$f(T_{41} - \Delta_2) = f[(4, 2)^T] = -8 < f(T_{40})$$

$$\therefore T_{42} = (4, 2)^T = X^{(4)}$$

$$\text{且 } f(X^{(4)}) = -8$$

第五步:

$$T_{50} = (4.5, 2)^T$$

$$\text{且 } f(T_{50}) = -7.75$$

$$f(T_{50} + \Delta_1) = f[(5, 2)^T] = -7 > f(T_{50})$$

$$f(T_{50} - \Delta_1) = f[(4, 2)^T] = -8 < f(T_{50})$$

$$\therefore T_{51} = (4, 2)^T$$

$$f(T_{51} + \Delta_2) = f[(4, 2.5)^T] = -7.75 = f(T_{50})$$

$$f(T_{51} - \Delta_2) = f[(4, 1.5)^T] = -7.5 > f(T_{50})$$

$$\therefore T_{52} = (4, 2)^T = X^{(5)}$$

此时应在(4, 2)附近探索, 缩小步长以求得符合精度要求的结果.

但由题意知, 此时最优解为 $X^* = (4, 2)^T$, 如图 8-1 所示.

8.15 分析非线性规划

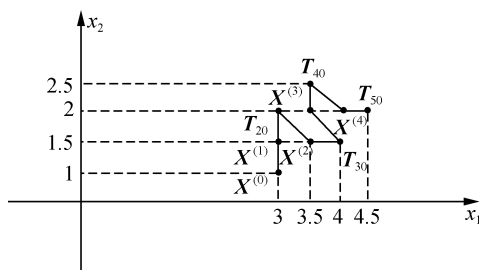


图 8-1

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 4 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

在以下各点的可行下降方向(使用式(8-6)和式(8-7)):

$$(1) \mathbf{X}^{(1)} = (0, 0)^T; \quad (2) \mathbf{X}^{(2)} = (2, 2)^T; \quad (3) \mathbf{X}^{(3)} = (3, 2)^T.$$

并绘图表示各点可行下降方向的范围.

【解】 原非线性规划等同于

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ g_1(\mathbf{X}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = -x_2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla_1(\mathbf{X})^T = (2x_1, 2(x_2 - 2))^T$$

$$\nabla_2(\mathbf{X})^T = (0, -1)^T$$

$$\nabla f(\mathbf{X})^T = 2(x_1 - 2, 2(x_2 - 3))^T$$

$$(1) \mathbf{X}^{(1)} = (0, 0)^T$$

起作用约束的是 $g_1(\mathbf{X})$

$$\therefore \nabla_1(\mathbf{X}^{(1)})^T \mathbf{D} = (0, -4) \mathbf{D} > 0$$

$$\nabla f(\mathbf{X}^{(1)})^T \mathbf{D} = (-4, -6) \mathbf{D} < 0$$

得 $\mathbf{D} = (a, b)^T$ 则有

$$\begin{cases} -4b > 0 \\ -4a - 6b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a > -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

存在可行下降方向

$$(2) \mathbf{X}^{(2)} = (2, 2)^T$$

起作用约束的是 $g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X})$

$$\therefore \nabla_1(\mathbf{X}^{(2)})^T \mathbf{D} = (4, 0) \mathbf{D} > 0$$

$$\nabla_2(\mathbf{X}^{(2)})^T \mathbf{D} = (0, -1) \mathbf{D} > 0$$

$$\nabla f(\mathbf{X}^{(2)})^T \mathbf{D} = (0, -2) \mathbf{D} < 0$$

即

$$\begin{cases} 4a > 0 \\ -b > 0 \\ -2b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (\text{无可行解})$$

不存在可行下降方向

$$(3) \mathbf{X}^{(3)} = (3, 2)^T$$

起作用约束的为 $g_2(\mathbf{X})$

$$\therefore \nabla g_2(\mathbf{X}^{(3)})^T \mathbf{D} = (0, -1) \mathbf{D} > 0$$

$$\nabla f(\mathbf{X}^{(3)})^T \mathbf{D} = (2, -2) \mathbf{D} < 0$$

$$\therefore \begin{cases} -b > 0 \\ 2a - 2b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a < b \end{cases}$$

存在可行下降方向.

8.16 试写出下述二次规划的 Kuhn-Tucker 条件:

$$\begin{cases} \max f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \mathbf{X} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

其中: $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{H}$ 为 $n \times n$ 矩阵, $\mathbf{C}$ 为 n 维列向量, $\mathbf{b}$ 为 m 维列向量, 变量 $\mathbf{X}$ 为 n 维列向量.

【解】 二次规划等同于

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{X}) = -\mathbf{C}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} \\ g_1(\mathbf{X}) = -\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b} \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

设 $\mathbf{X}^*$ 为极小点, 且与 $\mathbf{X}^*$ 点起作用约束的各梯度线性无关, 这里假设 $g_1(\mathbf{X})$ 、 $g_2(\mathbf{X})$ 都为起作用约束, 则

存在向量 $\boldsymbol{\Gamma}^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_l^*)^T$

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{X}^*) - \sum_{j=1}^l \gamma_j^* \nabla g_j(\mathbf{X}^*) = 0 \\ \gamma_j^* g_j(\mathbf{X}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \\ \gamma_j^* \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mathbf{C}^T \nabla \mathbf{X}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} - \nabla(\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} - \sum_{j=1}^l \gamma_j^* \nabla g_j(\mathbf{X}^*) = 0 \\ \gamma_j^* g_j(\mathbf{X}^*) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l) \\ \gamma_j^* \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mathbf{C}^T \nabla \mathbf{X}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} - \nabla(\mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} + \gamma_1^* \mathbf{A}^T \nabla \mathbf{X}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} - \gamma_2^* \nabla \mathbf{X}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = 0 \\ \gamma_1^* (-\mathbf{A} \mathbf{X}^* + \mathbf{b}) = 0 \\ \gamma_2^* \mathbf{X}^* = 0 \\ \gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_l^* \geq 0 \end{cases}$$

8.17 试写出下述非线性规划的 Kuhn-Tucker 条件并进行求解:

$$(1) \begin{cases} \max f(x) = (x-3)^2 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \min f(x) = (x-3)^2 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

【解】 (1) 等同于

$$\begin{cases} \min f(x) = -(x-3)^2 \\ g_1(x) = x-1 \geq 0 \\ g_2(x) = -x+5 \geq 0 \end{cases}$$

写出目标函数和约束函数的梯度

$$\nabla f(x) = -2(x-3), \quad \nabla g_1(x) = 1, \quad \nabla g_2(x) = -1$$

对第一个和第二个约束条件分别引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*, γ_2^* , 得 $K-T$ 点为 x^* , 则有:

$$\begin{cases} -2(x^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0 \\ \gamma_1^*(x^*-1)=0 \\ \gamma_2^*(5-x^*)=0 \\ \gamma_1^*, \gamma_2^* \geq 0 \end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_2^* \neq 0$, 无解;

② 令 $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_2^* = 0$, 解之得 $x^* = 1, \gamma_1^* = 4$ 是 $K-T$ 点, 目标函数值 $f(x^*) = -4$;

③ 令 $\gamma_1^* = 0, \gamma_2^* \neq 0$, 解之得 $x^* = 5, \gamma_2^* = 4$ 是 $K-T$ 点, $f(x^*) = -4$;

④ 令 $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0$, 则 $x^* = 3$, 是 $K-T$ 点, $f(x^*) = 0$, 但不最优.

此问题不为凸规划, 故极小点 1 和 5 是最优点.

(2) 等同于

$$\begin{cases} \min f(x) = (x-3)^2 \\ g_1(x) = x-1 \geq 0 \\ g_2(x) = 5-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x) = 2(x-3), \quad \nabla g_1(x) = 1, \quad \nabla g_2(x) = -1$$

引入广义拉格朗日乘子 γ_1^*, γ_2^* , 设 $K-T$ 点为 x^* , 则有:

$$\begin{cases} 2(x^*-3)-\gamma_1^*+\gamma_2^*=0 \\ \gamma_1^*(x^*-1)=0 \\ \gamma_2^*(5-x^*)=0 \end{cases}$$

① 令 $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_2^* \neq 0$, 无解

② 令 $\gamma_1^* \neq 0, \gamma_2^* = 0$, 则 $x^* = 1, \gamma_1^* = -4$, 不是 $K-T$ 点

③ 令 $\gamma_1^* = 0, \gamma_2^* \neq 0$, 则 $x^* = 5, \gamma_2^* = -4$, 不是 $K-T$ 点

④ 令 $\gamma_1^* = \gamma_2^* = 0$, 则 $x^* = 3$, 为 $K-T$ 点, 目标函数值 $f(x^*) = (3-3)^2 = 0$

由于该非线性规划问题为凸规划, 故 $x^* = 3$ 是全局极小点.

8.18 试找出非线性规划

$$\begin{cases} \max f(X) = x_1 \\ x_2 - 2 + (x_1 - 1)^3 \leq 0 \\ (x_1 - 1)^3 - x_2 + 2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

的极大点, 然后写出其 Kuhn-Tucker 条件, 这个极大点满足 Kuhn-Tucker 条件吗? 试加以说明.

【解】 这个非线性规划的 kuhn-Tucker 条件为:

$$\begin{cases} -1 + 3\gamma_1^*(x_1^*-1)^2 + 3\gamma_2^*(x_1^*-1)^2 - \gamma_3^* = 0 \\ \gamma_1^* - \gamma_2^* - \gamma_4^* = 0 \\ \gamma_1^* [(x_2^*-2) + (x_1^*-1)^3] = 0 \\ \gamma_2^* [(x_2^*-2) - (x_1^*-1)^3] = 0 \\ \gamma_3^* x_1^* = 0 \\ \gamma_4^* x_2^* = 0 \\ \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*, \gamma_4^* \geq 0 \end{cases}$$

极大点是 $X = (1, 2)^T$, 但它不是约束条件的正则点.

8.19 试解二次规划

$$\begin{cases} \min f(X) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 将上述二次规划改写为

$$\begin{cases} \min f(X) = \frac{1}{2}(4x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2) - 6x_1 - 3x_2 \\ 3 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 9 - 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

可知目标函数为严格凸函数, 此外

$$\begin{aligned} c_1 &= -6, \quad c_2 = -3, \quad c_{11} = 4, \quad c_{22} = 2 \\ c_{12} &= c_{21} = -4, \quad b_1 = 3, \quad a_{11} = -1, \quad a_{12} = -1 \\ b_2 &= 9, \quad a_{21} = -4, \quad a_{22} = -1 \end{aligned}$$

由于 c_1 和 c_2 小于零, 故引入的人工变量 z_1 和 z_2 前面取负号, 这样得到线性规划问题如下

$$\begin{cases} \min g(z) = z_1 + z_2 \\ -y_3 - 4y_4 + y_1 - 4x_1 + 4x_2 - z_1 = -6 \\ -y_3 - y_4 + y_2 + 4x_1 - 4x_2 - z_2 = -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - x_4 + 9 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2 \geq 0 \end{cases}$$

解此线性规划问题得

$$x_1^* = \frac{39}{20}, \quad x_2^* = \frac{21}{20}, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = \frac{3}{20}$$

$$z_1^* = 0, \quad z_2^* = 0, \quad y_3^* = \frac{21}{5}, \quad y_4^* = 0$$

$$f(X^*) = 2 \times \left(\frac{39}{20}\right)^2 - 4 \times \frac{39}{20} \times \frac{21}{20} + 4 \times \left(\frac{21}{20}\right)^2 - 6 \times \frac{39}{20} - 3 \times \frac{21}{20} = -\frac{441}{40}$$

8.20 试用可行方向法求解

$$\begin{cases} \min f(X) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 等同于

$$\begin{cases} \min f(X) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ g_1(X) = -(x_1 + x_2) + 2 \geq 0 \\ g_2(X) = -(x_1 + 5x_2) + 5 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

取初始可行点

$$\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0)^T, \quad f(\mathbf{X}^{(0)}) = 0, \quad \varepsilon = 0.1$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \times 0 - 2 \times 0 - 4 \\ 4 \times 0 - 2 \times 0 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{X}) = (-1, -1)^T, \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{X}) = (-1, -5)^T$$

$$g_1(\mathbf{X}^{(0)}) = 2 > 0, \quad g_2(\mathbf{X}^{(0)}) = 5 > 0$$

从而 $J(\mathbf{X}^{(0)}) = \emptyset$

$$\text{因 } \|\mathbf{Y}(\mathbf{X}^{(0)})\|^2 = 16 + 36 = 52 > \varepsilon$$

故 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不是极小点, 现取搜索方向 $\mathbf{D}^{(0)} = -\mathbf{Y}(\mathbf{X}^{(0)}) = (4, 6)^T$

$$\text{则 } \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} + \lambda \mathbf{D}^{(0)} = (4\lambda, 6\lambda)^T$$

将其代入约束条件, 令 $g_1(\mathbf{X}^{(1)}) = 0$

$$\text{得 } \lambda = 0.2$$

$$\text{令 } g(\mathbf{X}^{(2)}) = 0$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{5}{34} < 0.2$$

$$f(\mathbf{X}^{(1)}) = 32\lambda^2 + 72\lambda^2 - 48\lambda^2 - 16\lambda - 36\lambda = 56\lambda^2 - 52\lambda$$

$$\text{由 } \frac{df(\mathbf{X}^{(1)})}{d\lambda} = 0, \text{ 即 } 56 \times 2\lambda - 52 = 0$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{13}{28}$$

$$\text{因 } \lambda < \frac{13}{28}$$

故取

$$\lambda_0 = \lambda = \frac{5}{34}, \quad \mathbf{X}^{(1)} = \left(\frac{10}{17}, \frac{15}{17}\right)^T$$

$$f(\mathbf{X}^{(1)}) = -\frac{1860}{289}, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{X}^{(1)}) = \left(-\frac{58}{17}, -\frac{62}{17}\right)^T$$

$$g_1(\mathbf{X}^{(1)}) = \frac{9}{17} > 0, \quad g_2(\mathbf{X}^{(1)}) = 0$$

现构成下述线性规划问题

$$\begin{cases} \min \eta \\ -\frac{58}{17}d_1 - \frac{62}{17}d_2 \leq \eta \\ d_1 + 5d_2 \leq \eta \\ -1 \leq d_1 \leq 1, -1 \leq d_2 \leq 1 \end{cases}$$

为便于用单纯形法求解, 令

$$y_1 = d_1 + 1, \quad y_2 = d_2 + 1, \quad y_3 = -\eta$$

从而有

$$\begin{cases} \min(-y_3) \\ \frac{58}{17}y_1 + \frac{62}{17}y_2 - y_3 \geq \frac{120}{7} \\ y + 5y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_1 \leq 2 \\ y_2 \leq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

引入剩余变量 y_4 , 松弛变量 y_5, y_6 和 y_7 及人工变量 y_8 , 得线性规划问题

$$\begin{cases} \min(-y_3 + y_8) \\ \frac{58}{17}y_1 + \frac{62}{17}y_2 - y_3 - y_4 + y_8 = \frac{120}{7} \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_5 = 6 \\ y_1 + y_6 = 2 \\ y_2 + y_7 = 2 \\ y_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, 8) \end{cases}$$

得最优解

$$\therefore D^{(1)} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{14} \\ \frac{30}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{由此 } X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda D^{(1)} = \left(\frac{10}{17}, \frac{15}{17} \right)^T + \lambda \left(\frac{11}{14}, \frac{30}{7} \right)^T$$

$$\text{令 } \frac{df(X^{(2)})}{d\lambda} = 0$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{3}{71}$$

继续循环以上步骤可得.

8.21 试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases} \min f(X) = x_1^2 + x_2^2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

并求出当罚因子等于 1 和 10 时的近似解.

【解】 构造惩罚函数

$$P(X, M) = x_1^2 + x_2^2 + M \{ \min(0, x_2 - 1) \}^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2x_2 + 2M \{ \min(0, x_2 - 1) \}$$

$$\text{由 } \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \text{ 得最优解为 } X^* = (0, 1)^T$$

$$\text{当 } M=1 \text{ 时, } X = \left(0, \frac{1}{2} \right)^T$$

$$\text{当 } M=10 \text{ 时, } X = \left(0, \frac{10}{11} \right)^T$$

8.22 试用 SUMT 外点法求解

$$\begin{cases} \max f(\mathbf{X}) = x_1 \\ (x_2 - 2) + (x_1 - 1)^3 \leq 0 \\ (x_1 - 1)^3 - (x_2 - 2) \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 构造惩罚函数

$$P(\mathbf{X}, M) = x_1 + M \{ [\min(0, (x_2 - 2) + (x_1 - 1)^3)]^2 + [\min(0, (x_1 - 1)^3 - (x_2 - 2))]^2 \}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 1 + 2M [\min(0, ((x_2 - 2) + (x_1 - 1)^3) \cdot (3(x_1 - 1)^2))]]$$

$$+ 2M [\min(0, ((x_1 - 1)^3 - (x_2 - 2)) \cdot 3(x_1 - 1)^2)] = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2M [\min(0, (x_2 - 2) + (x_1 - 1)^3) + 2M (\min(0, -(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)))]$$

解得最优解为 $\mathbf{X}^* = (1, 2)^T$

8.23 试用 SUMT 内点法求解

$$\begin{cases} \min f(x) = (x+1)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

【解】 构造障碍函数

$$\bar{P}(x, \gamma) = (x+1)^2 + \frac{\gamma}{x}$$

$$\text{由 } \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 2(x+1) - \frac{\gamma}{x^2} = 0$$

$$\text{即 } 2x^2(x+1) = \gamma$$

当 $\gamma \rightarrow 0$ 时, 则 $x \rightarrow 0$ 或 $x \rightarrow -1$ (舍去)故最优解为 $x^* = 0, f(x^*) = (0+1)^2 = 1$

8.24 试用 SUMT 内点法求解

$$\begin{cases} \min f(x) = x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

【解】 构造障碍函数

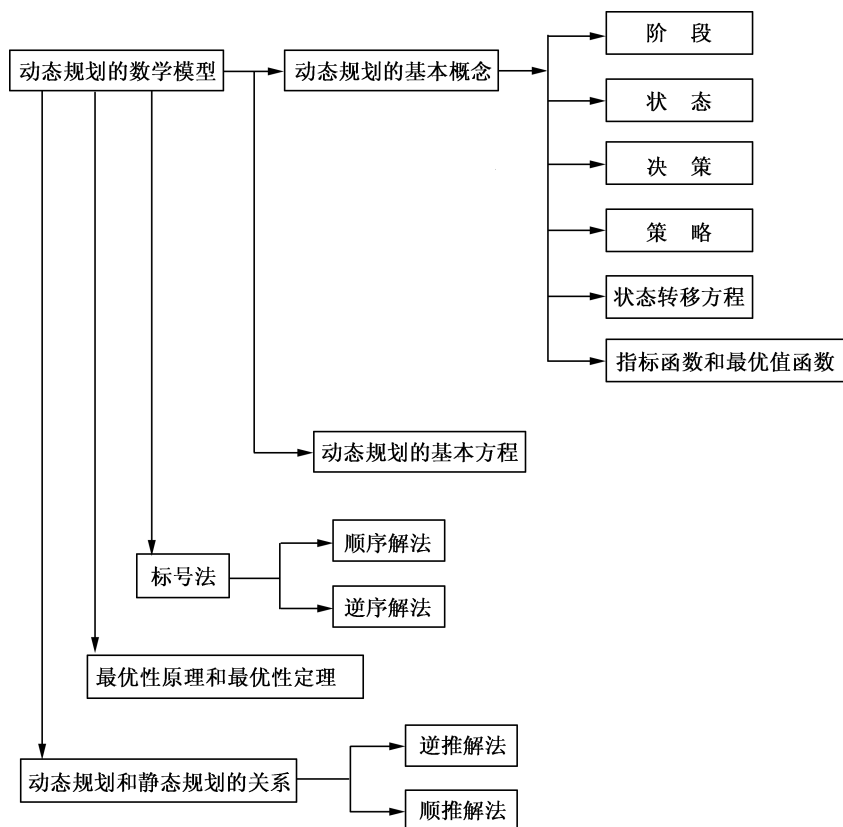
$$\bar{P}(x, \gamma) = x + \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma}{1-x}$$

$$\frac{\partial \bar{P}(x, \gamma)}{\partial x} = 1 - \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma}{(1-x)^2} = 0$$

得最优解 $x^* = 0, f(x^*) = 0$.

第9章 动态规划的基本方法

知识结构图



学习要求

1. 了解动态决策问题的特点及其类型.
2. 掌握贝尔曼最优化原理及其在动态规划中的运用.

重点、难点解答

1. 用于解决多阶段决策问题的最优化的一种优化方法,已广泛应用于军事、工业技术、企业管理、经济等领域.1951年,美国数学家 R·Bellman 等提出最优化原理,从而建立了动态规划,其名著《动态规划》于1957年出版.

2. 最优性原理:多段决策过程的特点是每个阶段都要进行决策. n 段决策过程的策略是由 n 个相继进行的阶段决策构成的决策序列.由于前阶段的终止状态又是后一阶段的初始状态.因此,确定阶段最优决策不能只从本阶段的效应出发,必须通盘考虑,整体规划.这就是说,阶段 k 的最优决策不应该只是

本阶段效应的最优,而必须是本阶段及其所有后续阶段的总体最优.即关于整个 k 原部子过程的最优决策.

最优策略具有的基本性质是:无论初始状态和初始决策如何,对于前面决策所造成的某一状态而言,余下的决策序列必构成最优策略.

其含义为:最优策略的任何一部分子策略,也是相应初始状态的最优策略.

3. 动态规划的基本方程

$$f_k(x_k) = \underset{u_k}{\text{opt}} \{ r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

其中, $r_k(x_k, u_k)$ 和 $x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$ 都是已知的函数.条件最优目标函数 $f_k(x_k)$ 和 $f_{k+1}(x_{k+1})$ 之间是递推关系.要求出 $u_k(x_k)$ 和 $f_k(x_k)$ 需要首先求出关于 x_k 的所有 $k+1$ 段状态 x_{k+1} 的 $f_{k+1}(x_{k+1})$, 这就决定了应用动态规划基本方程求条件最优决策 $u'_k(x_k)$ 和条件最优目标函数 $f_k(x_k)$, 总是逆着决策顺序进行的.

在条件最优决策序列和条件最优目标函数值的基础上,根据给定的初始条件,即可求出整个多段决策问题的最优目标函数值、最优策略和最优路线.

4. 动态规划问题求解的一般步骤:

逆序求条件最优目标函数 $f_k(x_k)$.

顺序求出最优策略,最优路线和最优目标函数值.

5. 动态规划四大要素、一个方程.

在动态规划求解中有五个方面的因素在起着关键的作用,通常称为动态规划 4 大要素,1 个方程.这 4 个要素,1 个方程为:

- (1) 状态变量及其可能集合.
- (2) 决策变量及其允许集合.
- (3) 状态转移方程 $x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$.
- (4) 阶段效应 $r_k(x_k, u_k)$.
- (5) 动态规划基本方程: $f_k(x_k) = \underset{u_k}{\text{opt}} \{ r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$.

课后习题全解

9.1 试分析本章第 9.1 节之例 2 问题中(1)阶段的划分;(2)状态变量和它的取值范围;(3)决策变量和它的允许决策集合;(4)状态转移方程;(5)指标函数和最优值函数.

【解】(1) 阶段的划分,阶段划分为五个阶段,阶段变量 $k=1, 2, 3, 4, 5$.

(2) 状态变量设为 s_k :表示第 k 年初完好的机器数量取值范围即

$$a^{k-1}s_1 \leq s_k \leq b^{k-1}s_1, \quad k=1, 2, 3, 4, 5$$

(3) 决策变量 $u_k(s_k)$ 表示第 k 年度中分配低负荷下生产的机器数量. $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合,则

$$D_k(s_k) = [0, s_k]$$

(4) 状态转移方程为:

$$S_{k+1} = a(s_k - u_k) + bu_k$$

(5) 指标函数为

$$V_{k5} = \sum_{k=1}^5 (g(s_k - u_k) + h(u_k))$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示 s_k 从第 k 年开始到第 5 年结束的总产量最大值.

$$f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq D_k(s_k)} \{ g(s_k - u_k) + h(u_k) + f_{k+1}[a(s_k - u_k) + bu_k] \} \quad (k=1, 2, \dots, 5)$$

$$f_6(s_6) = 0$$

9.2 设某工厂自国外进口一部精密机器,由机器制造厂至出口港有三个港口可供选择,而进口港又有三个可供选择,进口后可经由两个城市到达目的地,其间的运输成本如图9-1中所标的数字,试求运费最低的路线.

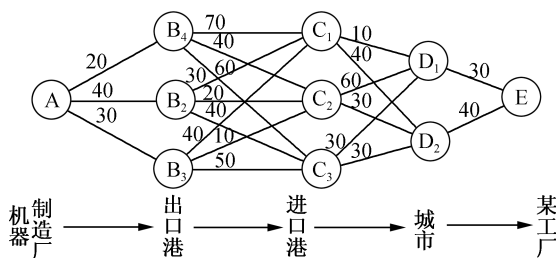


图 9-1

【解】 用 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段点 S_k 到终点 E 的运输成本.

$$d_k(s_k, u_k) = V_k(s_k, u_k)$$

表示在第 k 阶段由点 s_k 到点 $s_{k+1} = u_k(s_k)$ 的运输成本.

(1) 当 $k=4$ 时

$$f_4(D_1) = 30, \quad f_4(D_2) = 40$$

(2) 当 $k=3$ 时

$$f_3(c_1) = \min \begin{cases} d_3(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_1, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 10+30 \\ 40+40 \end{cases} = \min \begin{cases} 40 \\ 80 \end{cases} = 40$$

相应的决策为 $u_3(c_1) = D_1$.

$$f_3(c_2) = \min \begin{cases} d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 60+40 \\ 30+40 \end{cases} = \min \begin{cases} 100 \\ 70 \end{cases} = 70$$

相应的决策为 $u_3(C_2) = D_2$.

$$f_3(c_3) = \min \begin{cases} d_3(C_3, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_3, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 30+30 \\ 30+40 \end{cases} = \min \begin{cases} 60 \\ 70 \end{cases} = 60$$

相应的决策为 $u_3(C_3) = D_1$.

当 $k=2$ 时

$$f_2(B_1) = \min \begin{cases} d_2(B_1, C_1) + f_3(c_1) \\ d_2(B_1, C_2) + f_3(c_2) \\ d_2(B_1, C_3) + f_3(c_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 70+40 \\ 40+70 \\ 60+60 \end{cases} = \min \begin{cases} 110 \\ 110 \\ 120 \end{cases} = 110$$

相应决策为 $u_2(B_1) = C_1, u_2(B_1) = C_2$.

$$f_2(B_2) = \min \begin{cases} d_2(B_2, C_1) + f_3(c_1) \\ d_2(B_2, C_2) + f_3(c_2) \\ d_2(B_2, C_3) + f_3(c_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 30+40 \\ 20+70 \\ 40+60 \end{cases} = \min \begin{cases} 70 \\ 90 \\ 100 \end{cases} = 70$$

相应的决策为 $u_2(B_2) = C_1$.

$$f_2(B_3) = \min \begin{cases} d_2(B_3, C_1) + f_3(c_1) \\ d_2(B_3, C_2) + f_3(c_2) \\ d_2(B_3, C_3) + f_3(c_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 40+40 \\ 10+70 \\ 50+60 \end{cases} = \min \begin{cases} 80 \\ 80 \\ 110 \end{cases} = 80$$

相应的决策为 $u_2(B_3) = C_1, u_2(B_3) = C_2$.

当 $k=1$ 时

$$f_1(A) = \min \begin{cases} d_1(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d_1(A, B_2) + f_2(B_2) \\ d_1(A, B_3) + f_2(B_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 20+110 \\ 40+70 \\ 30+80 \end{cases} = \min \begin{cases} 130 \\ 110 \\ 110 \end{cases} = 110$$

相应的决策为 $u_1(A) = B_2, u_1(A) = B_3$.

采用顺递的方法可以得到最优的决策序列. 有三种

(1) 由 $u_1(A) = B_2, u_2(B_2) = C_1, u_3(C_1) = D_1, u_4(D_1) = E$. 得到最优决策序列为

$A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$.

(2) 由 $u_1(A) = B_3, u_2(B_3) = C_1, u_3(C_1) = D_1, u_4(D_1) = E$. 可得最优决策序列为

$A \rightarrow B_3 \rightarrow C_1 \rightarrow D_2 \rightarrow E$.

(3) 由 $u_1(A) = B_3, u_2(B_3) = C_2, u_3(C_2) = D_2, u_4(D_2) = E$. 可得最优决策序列为

$A \rightarrow B_3 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

采用标号法的逆序解法如图 9-2 所示, 其中每节点处上方的数表示该点到终点 E 的最低运费. 用直线连接的点表示该点到终点的最短路线. 未用直线连接的点说明它不是该点到终点的最短路线, 故这些支路均被舍去了.

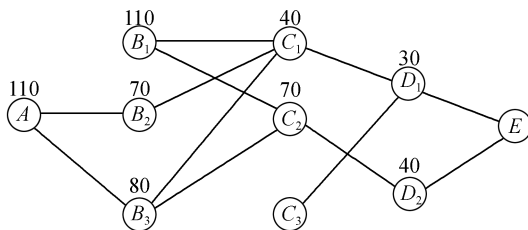


图 9-2

由上图直接可以看出从 A 到 E 有三条, 即三个最优决策序列:

$A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$, $A \rightarrow B_3 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$,

$A \rightarrow B_3 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

9.3 计算从 A 到 B, C 和 D 的最短路线. 已知各段路线的长度如图 9-3 所示.

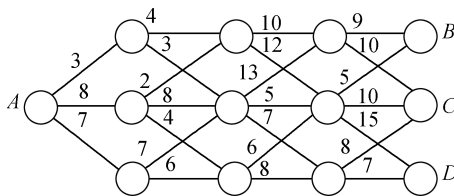


图 9-3

【解】 用 $d_k(s_k, u_k)$ 表示在第 k 阶段由点 s_k 至点 $s_{k+1} = u_k(s_k)$ 的距离, $f_k(s_k)$ 表示从 k 阶段点 s_k 到 A 的距离, 采用顺序解法.

构造如图 9-4.

(1) 当 $k=1$ 时

$$f_1(B_1) = 3, f_1(C_1) = 8, f_1(D_1) = 7$$

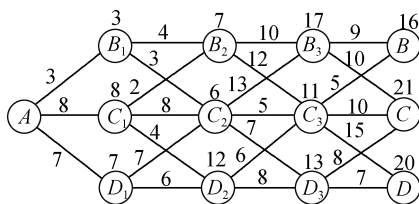


图 9-4

(2) 当 $k=2$ 时

$$f_2(B_2) = \min \left\{ \begin{matrix} d_1(B_1, B_2) + f_1(B_1) \\ d_1(C_1, B_2) + f_1(C_1) \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 4+3 \\ 2+8 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 7 \\ 10 \end{matrix} \right\} = 7$$

相应的对策为 $u_2(B_2) = B_1$.

$$f_2(c_2) = \min \left\{ \begin{matrix} d_1(B_1, C_2) + f_1(B_1) \\ d_1(C_1, C_2) + f_1(C_1) \\ d_1(D_1, C_2) + f_1(D_1) \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 3+3 \\ 8+8 \\ 7+7 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 16 \\ 14 \end{matrix} \right\} = 6$$

相应的对策为 $u_2(C_2) = B_1$.

$$f_2(D_2) = \min \left\{ \begin{matrix} d_1(C_1, D_2) + f_1(C_1) \\ d_1(D_1, D_2) + f_1(D_1) \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 4+8 \\ 6+7 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 13 \end{matrix} \right\} = 12$$

相应的决策为 $u_2(D_2) = C_1$.

(3) 当 $k=3$ 时

$$f_3(B_3) = \min \left\{ d_2(B_2, B_3) + f_2(B_2) \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 10+7 \\ 13+6 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 17 \\ 19 \end{matrix} \right\} = 17$$

相应的对策为 $u_3(B_3) = B_2$.

$$f_3(C_3) = \min \left\{ \begin{matrix} d_2(B_2, C_3) + f_2(B_2) \\ d_2(C_2, C_3) + f_2(C_2) \\ d_2(D_2, C_3) + f_2(D_2) \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 12+7 \\ 5+6 \\ 6+12 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 19 \\ 11 \\ 18 \end{matrix} \right\} = 11$$

相应的对策为 $u_3(C_3) = C_2$.

$$f_3(D_3) = \min \left\{ d_2(C_2, D_3) + f_2(C_2) \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 7+6 \\ 8+12 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 20 \end{matrix} \right\} = 13$$

相应的对策为 $u_3(D_3) = C_2$.

(4) 当 $k=4$ 时

$$f_4(B) = \min \left\{ d_3(B_3, B) + f_3(B_3) \right\} = \min \left\{ 9 + 17 \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 26 \\ 16 \end{matrix} \right\} = 16$$

相应的对策为 $u_4(B) = C_3$.

$$f_4(C) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_3(B_3, C) + f_3(B_3) \\ d_3(C_3, C) + f_3(C_3) \\ d_3(D_3, C) + f_3(D_3) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 10+17 \\ 10+11 \\ 8+13 \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 27 \\ 21 \\ 21 \end{array} \right\} = 21$$

相应的对策为 $u_4(C) = C_3, u_4(C) = D_3$.

$$f_4(D) = \min \left\{ \begin{matrix} d_3(C_3, D) + f_3(C_3) \\ d_3(D_3, D) + f_3(D_3) \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 15+11 \\ 7+13 \end{matrix} \right\} = \min \left\{ \begin{matrix} 26 \\ 20 \end{matrix} \right\} = 20$$

相应的对策为 $u_4(D) = D_3$.

由上面的分析可得:

$A \rightarrow B$ 的最优路径为

$A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow B$

$A \rightarrow C$ 的最优路径为

$A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C$ 或 $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow C$

$A \rightarrow D$ 的最优路径为

$A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow D$

9.4 写出下列问题的动态规划的基本方程.

$$(1) \max z = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i)$$

$$(2) \min z = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = b & (b > 0) \\ x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b & (a_i > 0) \\ x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

【解】 (1) 以 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段到第 n 阶段状态 $s_k = \sum_{i=k}^n x_i$ 时, 使 $z = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i)$ 最优的值, 则动态规划的基本方程为:

$$f_k(s_k) = \max_{0 \leq x_k \leq s_k} \{ \phi_k(s_k) + f_{k+1}(s_k - x_k) \} \quad (k = n, n-1, \dots, 1)$$

$$f_n(s_n) = \max_{x_n = s_n} \phi_n(x_n)$$

或 $f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$

状态转移方程为

$$s_{k+1} = s_k - x_k, \quad s_1 = b.$$

(2) 设状态变量为 $s_k (k = 1, \dots, n)$, 并记

$$s_k = \sum_{i=k}^n a_i x_i, \quad s_1 \geq b$$

状态转移方程为

$$S_{k+1} = S_k - a_k x_k$$

决策变量为 $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示在 s_k 状态下从第 k 至第 n 阶段的指标函数的最小值, 有

$$f_k(s_k) = \min_{0 \leq x_k \leq s_k} \{ C_k x_k^2 + f_{k+1}(s_k - a_k x_k) \}$$

$$f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$$

9.5 用递推方法求解下列问题

$$(1) \max z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

$$(2) \max z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$(3) \max z = x_1 \cdots x_n$$

$$(4) \min z = 3x_1^2 - 5x_1 + 3x_2^2 - 3x_2 + 2x_3^2 - 7x_3$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = c & (c > 0) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 16 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$(5) \max z = 3x_1^3 - 4x_1 + 2x_2^2 - 5x_2 + 2x_3 \quad (6) \min z = \sum_{i=1}^n x_i^p \quad (p > 1)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = c \quad (c > 0) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

【解】(1) 由题意, 将问题划分为三个阶段, 设状态变量为 s_0, s_1, s_2, s_3 , 并记 $s_3 = 10, x_1, x_2, x_3$ 为各阶段的决策变量, 各阶段指标函数按加法方式结合.

$f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态为 s_k , 第 1 至第 k 阶段的最大值则由约束条件可知

$$x_1 = s_1, \quad s_1 + x_2 = s_2, \quad s_2 + x_3 = s_3 = 10$$

$$\text{即 } s_1 = x_1, \quad 0 \leq x_2 \leq s_2, \quad 0 \leq x_3 \leq s_3$$

由顺推法

$$f_1(s_1) = \max_{x_1=s_1} (4x_1) = 4s_1$$

最优解: $x_1^* = s_1$.

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [9x_2 + f_1(s_1)] = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [9x_2 + 4s_1] \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [9x_2 + 4(s_2 - x_2)] = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [5x_2 + 4s_2] \\ &= 9s_2 \end{aligned}$$

最优解: $x_2^* = s_2$.

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} [2x_3^2 + f_2(s_2)] = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} [2x_3^2 + 9s_2] \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} [2x_3^2 + 9(10 - x_3)] = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} [2x_3^2 - 9x_3 + 90] \quad (\text{由二次函数的性质}) \\ &= 2 \times 10^2 - 9 \times 10 + 90 = 200 \end{aligned}$$

最优解: $x_3^* = 10$

$$x_2^* = s_2 = 10 - x_3^* = 0$$

$$x_1^* = s_1 = s_2 - x_2^* = 0 - 0 = 0$$

从而得到最优解

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 10$$

最优值为: 200

(2) 将该问题分为三个阶段, 状态变量为 s_0, s_1, s_2, s_3 , 且 $s_3 \leq 10$.

令 x_1, x_2, x_3 为各阶段的决策变量, 各阶段指标函数按加法方式结合. 最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态为 s_k , 从第 1 至第 k 阶段的最大值, 则

$$2x_1 = s_1, \quad s_1 + 4x_2 = s_2, \quad s_2 + 3x_3 = s_3 \leq 10$$

解得

$$x_1 = \frac{s_1}{2}, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{4}, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3} \quad \left(\text{即 } 0 \leq x_3 \leq \frac{10}{3} \right)$$

用递推法得

$$f_1(s_1) = \max_{x_1=\frac{s_1}{2}} (4x_1) = 2s_1$$

最优解为 $x_1^* = \frac{s_1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{4}} (f_1(s_1) + 4x_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{4}} (2s_1 + 9x_2) \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{4}} [2(s_2 - 4x_2) + 9x_2] = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{4}} [2s_2 + x_2] \\
 &= 2s_2 + \frac{s_2}{4} = \frac{9}{4}s_2
 \end{aligned}$$

最优解为 $x_2^* = \frac{s_2}{4}$.

$$\begin{aligned}
 f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} [2x_3^2 + f_2(s_2)] = \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2x_3^2 + \frac{9}{4}s_2 \right] \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2x_3^2 + \frac{9}{4}(s_3 - 3x_3) \right] = \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2x_3^2 - \frac{27}{4}x_3 + \frac{9}{4}s_3 \right]
 \end{aligned}$$

由 $0 \leq x_3 \leq 10$, 二次函数的性质.

当 $x_3^* = 0, s_3 = 10$ 处

$$f_3(s_3) = \frac{90}{4}$$

$$x_2^* = \frac{s_2}{4} = \frac{1}{4}(s_3 - 3x_2^*) = \frac{1}{4}(10 - 0) = \frac{10}{4}$$

$$x_1^* = \frac{s_1}{2} = \frac{1}{2}(s_2 - 4x_2^*) = 0$$

故最优解为

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{10}{4}, \quad x_3^* = 0$$

$$\max z = 4x_1^* + 9x_2^* + 2(x_3^*)^2 = 9 \times \frac{10}{4} = \frac{90}{4}$$

(3) 将该问题分为 n 个阶段, 设置状态变量为 $s_0, s_1, \dots, s_n, s_n = c$.

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为各阶段的决策变量. 指标函数按乘法方式结合. 最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态 s_k 从第 1 至第 k 阶段的最大值.

$$x_1 = s_1, \quad s_1 + x_2 = s_2, \quad s_2 + x_3 = s_3, \quad \dots, \quad s_{n-1} + x_n = s_n = c.$$

则

$$x_1 = s_1, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_3 \leq s_3, \dots, 0 \leq x_n \leq s_n$$

用递推法将

$$f_1(s_1) = \max_{x_1=s_1} (x_1) = s_1$$

最优解为 $x_1^* = s_1$.

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2 f_1(s_1)] = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2 \times s_1] \\
 &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2(s_2 - x_2)] = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} [-x_2^2 + x_2 s_2] \\
 &= \frac{s_2^2}{4} \quad (\text{由二次函数的性质})
 \end{aligned}$$

最优解为 $x_2^* = \frac{s_2}{2}$.

$$\begin{aligned}
 f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} [x_3 f_2(s_2)] = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \left[x_3 \times \frac{s_2^2}{4} \right] \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \left[x_3 \times \frac{(s_3 - x_3)^2}{4} \right]
 \end{aligned}$$

设对 x_3 的导数为 0, 即

$$\frac{1}{4} [(s_3 - x_3)^2 - 2x_3(s_3 - x_3)] = 0$$

$$\text{在 } x_3^* = \frac{s_3}{3} \text{ 处, } f_3(s_3) = \frac{s_3^3}{27} = \left(\frac{s_3}{3}\right)^3$$

由以上可类推得

$$f_k(s_k) = \left(\frac{s_k}{k}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } f_{k+1}(s_{k+1}) &= \max_{0 \leq x_{k+1} \leq s_{k+1}} [x_{k+1} f_k(s_k)] \\
 &= \max_{0 \leq x_{k+1} \leq s_{k+1}} \left[x_{k+1} \times \left(\frac{s_k}{k}\right)^k \right] \\
 &= \max_{0 \leq x_{k+1} \leq s_{k+1}} \left[x_{k+1} \left(\frac{s_{k+1} - x_{k+1}}{k}\right)^k \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{在 } x_{k+1}^* = \frac{s_{k+1}}{k+1} \text{ 处, } f_{k+1}(s_{k+1}) = \left(\frac{s_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$$

由数学归纳可得

$$f_n(s_n) = \left(\frac{s_n}{n}\right)^n = \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

最优解为 $x_n^* = \frac{c}{n}$. 则

$$s_{n-1} = s_n - x_n^* = c - \frac{c}{n} = \frac{n-1}{n}c$$

$$x_{n-1}^* = \frac{s_{n-1}}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} \times \frac{c}{n} = \frac{c}{n}$$

依此来推得

$$x_{n-2}^* = \frac{c}{n}, \quad \dots, \quad x_n^* = \frac{c}{n}$$

(4) 原问题变形为

$$\min z = (3x_1^2 - 5x_1) + (3x_2^2 - 3x_2) + (2x_3^2 - 7x_3)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 16 \\ x_i \geq 0, i=1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\min z = 3\left(x_1 - \frac{5}{6}\right)^2 + 3\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x_3 - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{215}{24}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2\left(x_1 - \frac{5}{6}\right) + 3\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(x_3 - \frac{7}{4}\right) \geq \frac{28}{3} \\ x_i \geq 0, i=1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\text{设 } y_1 = x_1 - \frac{5}{6}, \quad y_2 = x_2 - \frac{1}{2}, \quad y_3 = x_3 - \frac{7}{4}$$

则原问题等价于

$$\begin{aligned} \min z &= 3y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 - \frac{215}{24} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq \frac{28}{3} \\ y_1 + \frac{5}{6} \geq 0 \\ y_2 + \frac{1}{2} \geq 0 \\ y_3 + \frac{7}{4} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \min z &= 3y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 - \frac{215}{24} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq \frac{28}{3} \\ y_1 \geq -\frac{5}{6} \\ y_2 \geq -\frac{1}{2} \\ y_3 \geq -\frac{7}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

对上述问题分为三个阶段, 状态变量设为 s_0, s_1, s_2, s_3 且 $s_3 \geq \frac{28}{3}$.

y_1, y_2, y_3 为各阶段的决策变量, 各阶段指标函数按加法方式结合.

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段结束状态为 s_k , 从第 1 至第 k 阶段的最小值

$$2y_1 = s_1, \quad s_1 + 3y_2 = s_2, \quad s_2 + 2y_3 \leq s_3, \quad s_3 \geq \frac{28}{3}$$

结合题干中的约束条件, 即

$$y_1 = \frac{s_1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_2}{3}, \quad -\frac{7}{4} \leq y_3 \leq \frac{s_3}{2}$$

$$f_1(s_1) = \min_{y_1 = \frac{s_1}{2}} (3y_1^2) = \frac{3s_1^2}{4}$$

最优解为 $y_1^* = \frac{s_1}{2}$.

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_2}{3}} [3y_2^2 + f_1(s_1)] = \min_{-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_2}{3}} \left[3y_2^2 + \frac{3s_1^2}{4} \right] \\ &= \min_{-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_2}{3}} \left[3y_2^2 + \frac{3(s_2 - 3y_2)^2}{4} \right] = \min_{-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_2}{3}} \left[\frac{39}{4}y_2^2 + \frac{3s_2^2}{4} - \frac{18s_2}{4}y_2 \right] \end{aligned}$$

令 $\frac{39}{4}y_2 + \frac{3}{4}s_2 - \frac{18}{4}s_2y_2$ 对 y_2 求导为 0. 即

$$\frac{39}{2}y_2 - \frac{18}{4}s_2 = 0$$

$$\therefore y_2 = \frac{3}{13}s_2$$

故 $f_2(s_2) = \frac{3}{13}s_2^2$, 最优解为 $y_2^* = \frac{3}{13}s_2$.

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \min_{-\frac{4}{7} \leq y_3 \leq \frac{s_3}{2}} [2y_3^2 + f_2(s_2)] = \min_{-\frac{4}{7} \leq y_3 \leq \frac{s_3}{2}} \left[2y_3^2 + \frac{3}{13}s_2^2 \right] \\ &= \min_{-\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2y_3^2 + \frac{3(s_3 - 2y_3)^2}{13} \right] \end{aligned}$$

由求驻点法可得 $f_3(s_3) = \frac{3}{19}s_3^2$

最优解为 $y_3^* = \frac{3}{19}s_3$.

又 $\because s_3 \geq \frac{28}{3}$

$$\therefore f_3(s_3) \geq \frac{3}{19} \times \left(\frac{28}{3} \right)^2$$

而 $\min z = \min \left\{ f_3(s_3) - \frac{215}{24} \right\} = \frac{3}{19} \times \left(\frac{28}{3} \right)^2 - \frac{215}{24} = \frac{729}{152}$

反推得到最优解为

$$x_1^* = \frac{69}{38}, \quad x_2^* = \frac{5}{38}, \quad x_3^* = \frac{245}{76}$$

(5) 将问题分为 3 个阶段, 状态变量为 $s_0, s_1, s_2, s_3, s_3 \leq 18$.

x_1, x_2, x_3 为各阶段的决策变量, 各阶段指标函数按加法方式结合. 最优值函数 $f_k(s_k)$ 为第 k 阶段结束状态为 s_k , 第 1 至第 k 阶段的最大值.

$$4x_1 = s_1, \quad s_1 + 2x_2 = s_2, \quad s_2 + 3x_3 = s_3 \leq 18$$

则

$$x_1 = \frac{s_1}{4}, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{2}, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}$$

$$f_1(s_1) = \max_{x_1 = \frac{s_1}{4}} [3x_1^3 - 4x_1] = \frac{3}{64}s_1^3 - s_1$$

最优解为 $x_1^* = \frac{s_1}{4}$.

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{2}} [2x_2^2 - 5x_2 + f_1(s_1)] \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{s_2}{2}} \left[2x_2^2 - 5x_2 + \frac{3}{64}(s_2 - 2x_2)^2 - (s_2 - 2x_2) \right] \\ &= \frac{3s_2^3}{64} - s_2 \end{aligned}$$

最优解为 $x_2^* = 0$.

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} [2x_3 + f_2(s_2)] = \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2x_3 + \frac{3s_2^3}{64} - s_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[2x_3 + \frac{3(s_3 - 3x_3)^3}{64} - (s_3 - 3x_3) \right] \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq \frac{s_3}{3}} \left[5x_3 + \frac{3(s_3 - 3x_3)^3}{64} - s_3 + 3x_3 \right] \\
 &= \frac{3}{64} s_3^2 - s_3
 \end{aligned}$$

最优解为 $x_3^* = 0$.

$$\max z = \max \{f_3(s_3)\} = \max \left\{ \frac{3}{64} s_3^2 - s_3 \right\} = \frac{204^3}{8} \quad (s_3 = 18).$$

$$s_2 = s_3 - 3x_3^* = 18 - 0 = 18$$

$$s_1 = s_2 - 2x_2^* = 18 - 2 \times 0 = 0$$

$$x_1^* = \frac{s_1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

最优解为 $x_1^* = \frac{9}{2}, x_2^* = 0, x_3^* = 0$.

(6) 划分 n 个阶段, 状态变量为 $s_0, s_1, \dots, s_n, s_n = c, x_1, \dots, x_n$ 为各阶段决策变量. 其指标函数按加法方式结合. 最优值函数 $f_k(s_k)$ 为第 k 阶段结束状态为 s_k , 第 1 至第 k 阶段的最小值.

$$s_1 = x_1, \quad s_1 + x_2 = s_2, \quad \dots, \quad s_{n-1} + x_n = s_n = c.$$

则

$$x_1 = s_1, \quad 0 \leq x_2 \leq s_2, \quad \dots, \quad 0 \leq x_n \leq s_n,$$

$$f_1(s_1) = \min_{x_1=s_1} (x_1^p) = s_1^p$$

最优解为 $x_1^* = s_1$.

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2^p + f_1(s_1)] = \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2^p + s_1^p] \\
 &= \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} [x_2^p + (s_2 - x_2)^p] = 2 \cdot \left(\frac{s_2}{2} \right)^p
 \end{aligned}$$

最优解为 $x_2^* = \frac{s_2}{2}$.

依此类推

$$f_n(s_n) = n \cdot \left(\frac{s_n}{n} \right)^p$$

最优解为 $x_n^* = \frac{s_n}{n}$.

$$s_{n-1} = s_n - x_n^* = s_n - \frac{s_n}{n} = \frac{n-1}{n} s_n$$

$$x_{n-1}^* = \frac{1}{n-1} s_{n-1} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} s_n = \frac{1}{n} s_n$$

依此类推

$$x_1^* = \frac{1}{n} s_n$$

而 $x_1^* + \dots + x_n^* = C$

$$\therefore s_n = C$$

最优解为 $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = \frac{c}{n}$.

$$\min z = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot c \right)^p = \frac{c^p}{n^{p-1}}$$

9.6 设某人有一 400 万元金额,计划在四年内全部用于投资中去.已知在一年内若投资用去 x 万元就能获得 $\sqrt{x}$ 万元的效用.每年没有用掉的金额,连同利息(年利息 10%)可再用于下一年的投资.而每年已打算用于投资的金额不计利息,试制订金额的使用计划,而使四年内获得的总效用最大?

- (1) 用动态规划方法求解;
- (2) 用拉格朗日乘数法求解;
- (3) 比较两种解法,并说明动态规划方法有哪些优点.

【解】 (1) 用动态规划方法解.

设置阶段:按年份分为 4 阶段,则 $k=1,2,3,4$.

状态变量 s_k :第 k 年年年初的可供投资的金额.

决策变量 x_k :第 k 年实际用于投资的金额.

状态转移方程: $s_{k+1} = 1.1(s_k - x_k)$.

$$\text{允许决策集合: } p_k(s_k) = \left\{ \frac{x_k}{0} \leq x_k \leq s_k \right\}.$$

最优值函数 $f_k(s_k)$:以数量 s_k 可供投资的金额投资于第 k 年至第 4 年末所得到的最大效用.

该问题的逆序关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq x_k \leq s_k} \{ \sqrt{x_k} + f_{k+1}(s_{k+1}) \} \\ f_5(s_5) = 0 \quad k=4,3,2,1 \end{cases}$$

$$\text{当 } k=4 \text{ 时, } f_4(s_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_4} \{ \sqrt{x_4} \} = \sqrt{s_4}$$

最优解为 $x_4^* = s_4$.

当 $k=3$ 时

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{ \sqrt{x_3} + f_4(s_4) \} = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{ \sqrt{x_3} + \sqrt{s_4} \} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{ \sqrt{x_3} + \sqrt{1.1(s_3 - x_3)} \} = \sqrt{2.1s_3} \quad (\text{令关于 } x_3 \text{ 的一阶导数为 } 0) \end{aligned}$$

相应的最优解为 $x_3^* = \frac{1}{2.1}s_3$.

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{ \sqrt{x_2} + f_3(s_3) \} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{ \sqrt{x_2} + \sqrt{2.1s_3} \} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{ \sqrt{x_2} + \sqrt{2.1 \times 1.1(s_2 - x_2)} \} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{ \sqrt{x_2} + \sqrt{2.31(s_2 - x_2)} \} \\ &= \sqrt{3.31s_2} \quad (\text{由关于 } x_2 \text{ 的一阶导数为 } 0 \text{ 可求得}) \end{aligned}$$

相应的最优解为 $x_2^* = \frac{1}{3.31}s_2$.

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{ \sqrt{x_1} + f_2(s_2) \} = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{ \sqrt{x_1} + \sqrt{3.31s_2} \} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{ \sqrt{x_1} + \sqrt{3.31 \times 1.1(s_1 - x_1)} \} = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{ \sqrt{x_1} + \sqrt{3.641(s_1 - x_1)} \} \\ &= \sqrt{4.461s_1} \quad (\text{由关于 } x_1 \text{ 的一阶导数为 } 0 \text{ 可求得}) \end{aligned}$$

相应的最优解为 $x_1^* = \frac{s_1}{4.461}$.

而 $s_1 = 400$

故 4 年内的最大效用为

$$f_1(400) = \sqrt{4.461 \times 400} = 43 \text{ (万元)}$$

返推可得最优解为

$$x_1^* = \frac{s_1}{4.461} = \frac{400}{4.461} = 86 \text{ (万元)}$$

$$x_2^* = \frac{1}{3.31} s_2 = \frac{1}{3.31} \times 1.1(s_1 - x_1^*) = \frac{1}{3.31} \times 1.1(400 - 86) = 104 \text{ (万元)}$$

$$x_3^* = \frac{1}{2.1} s_3 = \frac{1}{2.1} \times 1.1(s_2 - x_2^*) = 126 \text{ (万元)}$$

$$x_4^* = s_4 = 1.1(s_3 - x_3^*) = 153 \text{ (万元)}$$

(2) 用拉格朗日乘数法解.

第 i 年 ($i=1, 2, 3, 4$) 用于投资的金额为 x_i 万元, 获得效用为 $\sqrt{x_i}$ 万元, 没有用掉的金额为 y_i 万元, 其中 $y_4=0$, 则

$$\begin{aligned} \max z &= \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + y_1 = 400 \\ x_2 + y_2 = 1.1y_1 \\ x_3 + y_3 = 1.1y_2 \\ x_4 = 1.1y_3 \\ x_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4 \\ y_j \geq 0, j=1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(x_i, y_i, \lambda_i) &= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}) + \lambda_1(x_1 + y_1 - 400) + \lambda_2(x_2 + y_2 - 1.1y_1) \\ &\quad + \lambda_3(x_3 + y_3 - 1.1y_2) + \lambda_4(x_4 - 1.1y_3) \end{aligned}$$

其中 $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2, 3, 4$)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_i}} + \lambda_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = \lambda_1 - 1.1\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda_2 - 1.1\lambda_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_3} = \lambda_3 - 1.1\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{4\lambda_i^2} \\ \lambda_1 = 1.1\lambda_2 \\ \lambda_2 = 1.1\lambda_3 \\ \lambda_3 = 1.1\lambda_4 \end{cases}$$

则

$$x_i = \frac{1}{4\lambda_i^2}, \quad \lambda_3 = 1.1\lambda_4, \lambda_2 = 1.21\lambda_4, \quad \lambda_1 = (1.1)^3\lambda_4 = 1.331\lambda_4$$

$$x_4 = \frac{1}{4x_4^2}, x_3 = \frac{1}{4\lambda_3^2} = \frac{1}{4 \times 1.1^2 \lambda_4^2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4\lambda_2^2} = \frac{1}{4 \times 1.21^2 \lambda_4^2}, x_1 = \frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{4 \times 1.331^2 \lambda_4^2}$$

$$y_3 = \frac{1}{1.1}x_4 = \frac{1}{4 \times 1.1 \lambda_4^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{1.1}[x_3 + y_3] = \frac{1}{1.1} \left[\frac{1}{4 \times 1.1^2 \lambda_4^2} + \frac{1}{4 \times 1.1 \lambda_4^2} \right] = \frac{1}{1.1} \left[\frac{1}{4 \times 1.21} + \frac{1}{4 \times 1.1} \right] \frac{1}{\lambda_4^2}$$

$$y_1 = \frac{1}{1.1}[x_2 + y_2] = \frac{1}{1.1} \left[\frac{1}{4 \times 1.21^2} + \frac{1}{1.1} \left(\frac{1}{4 \times 1.21} + \frac{1}{4 \times 1.1} \right) \right] \frac{1}{\lambda_4^2}$$

由 $x_1 + y_1 = 400$ 得

$$x_1 = 86(\text{万元}), \quad x_2 = 104(\text{万元})$$

$$x_3 = 126(\text{万元}), \quad x_4 = 153(\text{万元})$$

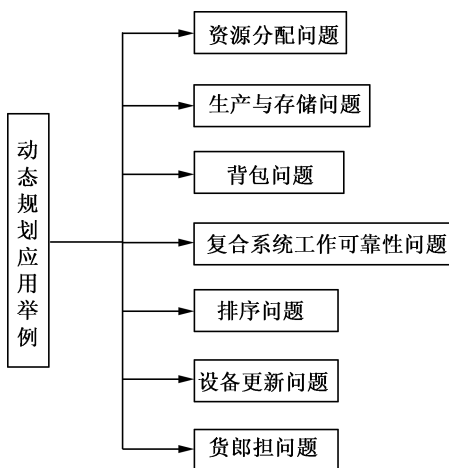
即为所求最优解.

(3) 两种方法所得结果相吻合,用动态规划方法求解有以下的优点

- ① 易于确定全局最优解.
- ② 能得到一族解,便于分析结果,这里得到的不仅是全过程的解,而且包含所有子过程的一族解.

第 10 章 动态规划应用举例

知识结构图



学习要求

1. 掌握资源分配问题的求法.
2. 掌握生产与贮存问题的求法.
3. 了解背包问题和复合系统工作可靠性问题的求法.
4. 掌握排序问题和设备更新问题的求法.
5. 了解货郎担问题的求法.

重点、难点解答

动态规划原理非常简单,然而,却可以解决很多复杂的问题.根据问题的具体条件不同,有些状态变量是单一的,有些则是多变量的,有些问题中状态和决策变量是离散取值的,有些则是连续取值的.有些问题的阶段数是确定的,有些问题的目标是阶段效应求和的形式,而有些则是其他的形式.对于不同形式的问题在求解中将应用不同的处理方法.

课后习题全解

10.1 有一部货车每天沿着公路给四个零售店卸下 6 箱货物,如果各零售店出售该货物所得利润如表 10-1 所示,试求在各零售店卸下几箱货物,能使获得总利润最大? 其值是多少?

表 10-1

利润 箱数	零售店	1	2	3	4
0		0	0	0	0
1		4	2	3	4
2		6	4	5	5
3		7	6	7	6
4		7	8	8	6
5		7	9	8	6
6		7	10	8	6

【解】 由题设,可将问题分为四阶段, s_k 表示分配给第 k 至第 4 个零售店的货物数. x_k 表示分配给第 k 个零售店的箱数.

状态转移方程 $s_{k+1} = s_k - x_k$
 $p_k(x_k)$ 表示 x_k 箱货物分配到第 k 个店的盈利, $f_k(s_k)$ 表示 s_k 箱货物给第 k 至第 n 个零售店的最大盈利值.

得递推关系为

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \max_{0 \leq x_k \leq s_k} [p_k(s_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)] & k=4,3,2,1 \\ f_5(s_5) = 0 \end{cases}$$

第四阶段,即 $k=4$ 时,设将 s_4 箱货物($s_4=0,1,\dots,6$)全部卸下给零售店 4 时,则最大盈利值为

$$f_4(s_4) = \max_{x_4} [p_4(x_4)]$$

其中 $x_4 = s_4 = 0,1,2,3,4,5,6$
 数值计算如表 10-2 所示.

表 10-2

$s_4 \backslash x_4$	$p_4(x_4)$							$f_4(s_4)$	x_4^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1		4						4	1
2			5					5	2
3				6				6	3
4					6				6
5						6		6	5
6							6	6	6

表中 x_4^* 表示使 $f_4(s_4)$ 为最大值时的最优决策.
 第三阶段,即 $k=3$ 时,设把 s_3 箱货物($s_3=0,1,2,3,4,5,6$)卸下给零售店 3,零售店 4 时;则对每个 s_3 值,有一种最优分配方案,使最大盈利值

$$f_3(s_3) = \max_{x_3} [p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)]$$

其中 $x_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

因为给零售店 3 为 x_3 箱, 其盈利 $p_3(x_3)$, 余下的 $s_3 - x_3$ 箱就给零售店 4, 则盈利最大值为 $f_4(s_3 - x_3)$, 现要选择 x_3 的值, 使 $p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)$ 取最大值, 其数值计算如表 10-3.

表 10-3

$s_3 \backslash x_3$	$p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)$							$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0+0=0							0	0
1	0+4=4	3+0=3						4	0
2	0+5=5	3+4=7	5+0=5					7	1 或 3
3	0+6=6	3+5=8	5+4=9	7+0=7				9	2
4	0+6=6	3+6=9	5+5=10	7+4=11	8+0=8			11	3
5	0+6=6	3+6=9	5+6=11	7+5=12	8+4=12	8+0=8		12	3
6	0+6=6	3+6=9	5+6=11	7+6=13	8+5=13	8+4=12	8+0=8	13	3

第二阶段, 即 $k=2$ 时, 设把 s_2 箱货物 ($s_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 分配给零售店 2, 3, 4 时, 则对每个 s_2 值, 有一种最优分配方案, 使最大盈利值为

$$f_2(s_2) = \max_{x_2} [p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)]$$

其中 $x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

因为零售店 2 分给 x_2 箱货物, 其盈利为 $p_2(x_2)$, 余下的 $s_2 - x_2$ 台就给零售店 3, 4, 则它的盈利值为 $f_3(s_2 - x_2)$, 则要选择 x_2 的值, 使 $p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$ 取最大值, 其数值计算如表 10-4.

表 10-4

$s_4 \backslash x_4$	$p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$							$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0								
1	4	2						4	0
2	7	6	4					7	0
3	9	9	8	6				9	0, 1
4	11	11	11	10	8			11	0, 1, 2
5	12	13	13	13	12	9		13	1, 2, 3
6	13	14	15	15	15	13	10	15	2, 3, 4

第一阶段, 即 $k=1$ 时, 设把 s_1 箱货物 ($s_1 = 6$) 分配给零售店 1, 2, 3, 4 时, 则最大盈利为

$$f_1(6) = \max_{x_1} [p_1(x_1) + f_2(6 - x_1)]$$

其中 $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

因为零售店 1 分给 x_1 箱, 其盈利为 $p_1(x_1)$, 剩下 $6 - x_1$ 箱就给零售店 2, 3, 4, 则它的盈利最大值为 $f_2(6 - x_1)$, 现要选择 x_1 值, 使 $p_1(x_1) + f_2(6 - x_1)$ 取最大值, 它就是所求的总盈利最大值, 其数值计算如表 10-5.

表 10-5

$s_1 \backslash x_1$	$p_1(x_1) + f_2^*(s_2 - x_1)$							$f_1^*(6)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5	6		
6	15	17	17	16	14	11	7	17	1, 2

故知总利润最大值为 17; 最优分配方案有六种依次卸箱数为

- ① (1, 1, 3, 1) ② (1, 2, 2, 1)
 ③ (1, 5, 1, 1) ④ (2, 0, 3, 1)
 ⑤ (2, 1, 2, 1) ⑥ (2, 2, 1, 1)

10.2 设有某种肥料共 6 个单位重量, 准备供给四块粮田用. 其每块田施肥数量与增产粮食数字关系如表 10-6 所示. 试求对每块田施多少单位重量的肥料, 才使总的增产粮食最多.

表 10-6

施 肥	粮 田			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	20	25	18	28
2	42	45	39	47
3	60	57	61	65
4	75	65	78	74
5	85	70	90	80
6	90	73	95	85

【解】 问题可划分为 4 个阶段, s_k 表示分配给第 k 至第 4 块田的肥料重量, x_k 表示分给第 k 块田的肥料重量.

状态转移方程 $s_{k+1} = s_k - x_k$

$p_k(x_k)$ 为 x_k 的肥料用于第 k 块田的增产数, $f_k^*(s_k)$ 表示为 s_k 的肥料分配给 k 至 4 块田的最大产值.

递推公式为

$$\begin{cases} f_k^*(s_k) = \max_{0 \leq x_k \leq s_k} [p_k(x_k) + f_{k+1}^*(s_k - x_k)] & k=1, 2, 3, 4 \\ f_5^*(s_5) = 0 \end{cases}$$

第四阶段, 即 $k=4$ 时, 设将 s_4 个单位 ($s_4=0, 1, \dots, 6$), 全部分配给第 4 块田地时, 则最大的盈利值为

$$f_4^*(s_4) = \max [p_4(x_4)]$$

其中 $x_4 = s_4 = 0, 1, 2, \dots, 6$

因为此时只有一块田地, 全部分配给第 4 块田地, 故它的盈利值就是该段的最大盈利值, 其数值计算如表 10-7.

表 10-7

$s_4 \backslash$	$p_4(x_4)$							$f_4(s_4)$	x_4^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1		28						28	1
2			47					47	2
3				65				65	3
4					74			74	4
5						80		80	5
6							85	85	6

第三阶段,即 $k=3$ 时,把 s_3 个单位重量($s_3=0,1,2,\cdots,6$)分配给第 3,4 两块田地时,则对每个 s_3 的值,有一种最优分配方案,使最大盈利值为

$$f_3(s_3) = \max_{x_3} [p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)]$$

其中 $x_3=0,1,2,3,4,5,6$.

给第 3 块田分 x_3 个单位重量,其盈利为 $p_3(x_3)$,余下的 $s_3 - x_3$ 个单位重量就给第 4 块田地,则它的盈利最大值为 $f_4(s_3 - x_3)$,现要选择 x_3 的值,使 $p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)$ 的最大值,其数值计算如表 10-8.

表 10-8

$s_3 \backslash x_3$	$p_3(x_3) + f_4(s_3 - x_3)$							$f_3(s_3)$	x_4^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	28	18						28	0
2	47	46	39					47	0
3	65	65	67	61				67	2
4	74	83	86	89	78			89	3
5	80	92	104	108	106	90		108	3
6	85	98	113	126	125	118	95	126	3

第二阶段,即 $k=2$ 时,把 s_2 个单位重量($s_2=0,1,2,3,4,5,6$)分配给第 2,3,4 块田地时,则对每个 s_2 值,有一种最优分配方案,使最大盈利值为

$$f_2(s_2) = \max_{x_2} [p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)]$$

其中 $x_2=0,1,2,3,4,5,6$.

分给第 2 块田地 x_2 个单位重量,其盈利为 $p_2(x_2)$,余下的 $(s_2 - x_2)$ 个单位就给第 3,4 块田地,则它的盈利最大值为 $f_3(s_2 - x_2)$,现要选择 x_2 的值,使 $p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$ 取最大值,其数值如表 10-9.

表 10-9

$s_2 \backslash x_2$	$p_4(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$							$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	28	25						28	0
2	47	53	45					53	1
3	67	72	73	57				73	2
4	89	92	92	85	65			92	1, 2
5	108	114	112	104	93	70		114	1
6	126	133	134	133	128	113	90	134	0, 1, 2

第一阶段, 即 $k=1$ 时, 把 s_1 个单位重量 (这里只有 $s_1=6$ 的情况) 分配给第 1, 2, 3, 4 块田地时, 则最大盈利值为

$$f_1(6) = \max_{x_1} [p_1(x_1) + f_2(6 - x_1)]$$

其中 $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

给第 1 块田地 x_1 个单位重量, 其盈利值为 $p_1(x_1)$, 剩下的 $(6 - x_1)$ 个单位重量, 就分给第 2, 3, 4 块田地, 则它的盈利最大值为 $f_2(6 - x_1)$, 现要选择 x_1 的值, 使 $p_1(x_1) + f_2(6 - x_1)$ 取最大值, 它就是所求的总盈利最大值, 其数值为表 10-10.

表 10-10

$s_1 \backslash x_1$	$p_1(x_1) + f_2(s_1 - x_1)$							$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5	6		
6	134	134	134	133	128	113	90	134	0, 1, 2

综合上述得最大产量为 134, 最优方案如下:

- ① $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 3, x_4^* = 1$
- ② $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 3, x_4^* = 1$
- ③ $x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = 3, x_4^* = 1$
- ④ $x_1^* = 2, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 2$

10.3 某公司打算向它的三个营业区增设六个销售店, 每个营业区至少增设一个. 从各区赚取的利润与增设的销售店个数有关, 其数据为

销售店增加数	A 区利润	B 区利润	C 区利润
0	100 (万元)	200	150
1	200	210	160
2	280	220	170
3	330	225	180

4	340	230	200
---	-----	-----	-----

试求各区应分配几个增设的销售店,才能使总利润最大? 其值是多少?

【解】 按营业区分为三个阶段, $k=1, 2, 3$.

s_k 为 k 至第三个区增设的店数; x_k 为第 k 个区增设的店, 并根据题意有 $x_k \geq 1$, $p_k(s_k)$ 为 k 区增设 x_k 店所取得的利润; $f_k(s_k)$ 为从第 k 至第 3 个区分配 s_k 的设置的最大利润.

状态转移方程为 $s_{k+1} = s_k - x_k$, 则有逆序递推关系

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{1 \leq x_k \leq s_k} \{ p_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \} & (k=3, 2, 1) \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

第三阶段, 即 $k=3$

设将 s_3 个销售店 ($s_3=1, 2, 3, 4$) 全部分配给 C 区时, 则最大盈利值为

$$f_3(s_3) = \max_{x_3} [p_3(x_3)]$$

其中 $x_3 = s_3 = 1, 2, 3, 4$.

此时只有 C 区增设, 增设多少个销售店就全部分配给 C 区, 故它的盈利就是该段的最大盈利值, 其数值计算为表 10-11.

表 10-11

$s_3 \backslash x_3$	$p_3(x_3)$				$f_3(s_3)$	x_3^*
	1	2	3	4		
1	160				160	1
2		170			170	2
3			180		180	3
4				200	200	4

第二阶段, 即 $k=2$

设把增设 s_2 个销售店 ($s_2=2, 3, 4, 5$) 分配给 B, C 区时, 则对每个 s_2 值有一种最优分配方案, 使最大盈利值为

$$f_2(s_2) = \max_{x_2} [p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)]$$

其中 $x_2 = 1, 2, 3, 4$.

给 B 区增设 x_2 个销售店, 其盈利为 $p_2(x_2)$, 剩下的 $(s_2 - x_2)$ 个销售店就给 C 区, 则它的盈利最大值为 $f_3(s_2 - x_2)$, 现要选择 x_2 的值, 使 $p_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)$ 取最大值, 其数值计算如表 10-12.

表 10-12

$s_2 \backslash x_2$	$p_2(x_2) + f_3(s_2)$				$f_2(s_2)$	x_2^*
	1	2	3	4		
2	370				370	1
3	380	380			380	1, 2
4	390	390	385		390	1, 2

5	410	400	395	390	410	1
---	-----	-----	-----	-----	-----	---

第一阶段, 即 $k=1$

设 s_1 个销售店 ($s_1=6$) 分配给 A, B, C 三个区时, 则最大盈利值为

$$f_1(6) = \max_{x_1} [p_1(x_1) + f_2(6-x_1)]$$

其中 $x_1 = 1, 2, 3, 4$.

因为给 A 区增设 x_1 个零售店, 其盈利 $p_1(x_1)$, 剩下的 $(6-x_1)$ 个零售店, 给 B 和 C 两区, 则它为盈利最大值为 $f_1(6-x_1)$, 现要选择 x_1 值, 使 $p_1(x_1) + f_2(6-x_1)$ 取最大值, 它就是阶求的总盈利最大值, 其数值计算如表 10-13.

表 10-13

$s_1 \backslash x_1$	$p_1(x_1) + f_2(s_1 - x_1)$				$f_1(s_1)$	x_1^*
	1	2	3	4		
6	610	670	710	710	710	3, 4

故总利润最大为 710 万元, 增设方案有三个分别为

- ① $A=3, B=1, C=2$
- ② $A=3, B=2, C=1$
- ③ $A=4, B=1, C=1$

10.4 某工厂有 100 台机器, 拟分四个周期使用, 在每一周期有两种生产任务. 据经验, 把机器 x_1 台投入第一种生产任务, 则在一个生产周期中将有 $x_1/3$ 台机器作废; 余下的机器全部投入第二种生产任务, 则有 $1/10$ 机器作废. 如果干第一种生产任务每台机器可收益 10, 干第二种生产任务每台机器可收益 7. 问怎样分配机器, 使总收益最大?

【解】 按周期划分为 4 阶段 $k=1, 2, 3, 4$.

状态变量 s_k 表示第 k 年初的完好机器数.

决策变量 u_k 表示, 第 k 年度用于第一种任务的机器数, 则 $s_k - u_k$ 表示该年度第二种任务所用的机器台数;

状态转移方程为

$$s_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)u_k + \left(1 - \frac{1}{10}\right)(s_k - u_k) = \frac{2}{3}u_k + \frac{9}{10}(s_k - u_k)$$

设 $v_k(s_k, u_k)$ 为第 k 周期的收益, 则

$$v_k = 10u_k + 7(s_k - u_k)$$

指标函数为

$$v_{1,4} = \sum_{k=1}^4 v_k(s_k, u_k)$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 为由资源是 s_k 出发, 从第 k 至第 4 周期的总收益最大值, 递推关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{v_k + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0 \end{cases}$$

$$f_4(s_4) = \max_{0 \leq u_4 \leq s_4} [10u_4 + 7(s_4 - u_4)]$$

$$= \max_{0 \leq u_4 \leq x_4} [7s_4 + 3u_4] = 7s_4 + 3s_4 = 10s_4$$

最优解为 $u_4^* = s_4$

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max_{0 \leq u_3 \leq s_3} \left\{ 3u_3 + 7s_3 + 10 \left[\frac{2}{3}u_3 + \frac{9}{10}(s_3 - u_3) \right] \right\} \\ &= \max_{0 \leq u_3 \leq s_3} \left[16s_3 + \frac{2}{3}u_3 \right] = 16s_3 + \frac{2}{3}s_3 = \frac{50}{3}s_3 \end{aligned}$$

最优解为 $u_3^* = s_3$

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \max_{0 \leq u_2 \leq s_2} \left\{ 3u_2 + 7s_2 + \frac{50}{3} \left[\frac{2}{3}u_2 + \frac{9}{10}(s_2 - u_2) \right] \right\} \\ &= \max_{0 \leq u_2 \leq s_2} \left[22s_2 - \frac{8}{9}u_2 \right] = 22s_2 - \frac{8}{9} \times 0 = 22s_2 \end{aligned}$$

最优解为 $u_2^* = 0$

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max_{0 \leq u_1 \leq s_1} \left\{ 3u_1 + 7s_1 + 22 \left[\frac{2}{3}u_1 + \frac{9}{10}(s_1 - u_1) \right] \right\} \\ &= \max_{0 \leq u_1 \leq s_1} \left[\frac{134}{5}s_1 - \frac{32}{15}u_1 \right] = \frac{134}{5}s_1 - \frac{32}{15} \times 0 = \frac{134s_1}{5} \end{aligned}$$

最优解为 $u_1^* = 0$

因为 $s_1 = 100$, 故最大总收益

$$f_1(s_1) = 134 \times \frac{100}{5} = 2680$$

反推运算即可得到最优策略如下

第一周期 100 台全部投入第二种任务;

第二周期 100 台机器全部投入第二种任务;

第三周期 81 台机器投入第一种任务;

第四周期 54 台机器全部投入第一种任务.

10.5 用逐次逼近法求解下述问题

$$\max z = x_1^2 y_1 + 3x_2 y_2^2 + 4x_3^2 y_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, y_j \geq 0 \text{ 且为整数. } (i=1,2,3 \quad j=1,2,3) \end{cases}$$

【解】 逐次逼近法的思想为:先保持一个变量不变,对另一个变量实现最优化,然后交替固定,以迭代的形式反复进行,直到获得某种要求为止.

设 $x^{(0)} = (4, 2, 2)^T$, 固定 $x = x^{(0)}$, 对 y 求解.

问题转化为

$$\max z = 16y_1 + 6y_2^2 + 16y_3$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 30 \\ y_i \geq 0 \text{ 且为整数 } i=1,2,3 \end{cases}$$

利用动态规划法得:

$$\begin{aligned}
 f_3(30) &= \max_{\substack{3y_1+2y_2+5y_3 \leq 30 \\ y_i \geq 0, i=1,2,3}} \{16y_1+6y_2^2+16y_3\} = \max_{\substack{30-5y_3 \geq 3y_1+2y_2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0}} \{(16y_3)+16y_1+6y_2^2\} \\
 &= \max \{0+f_2(30), 16+f_2(25), 32+f_2(20), 48+f_2(15), 64+f_2(10), 80+f_2(5), \\
 &\quad 96+f_2(0)\}
 \end{aligned}$$

要求出 $f_3(30)$, 必须计算 $f_2(30), f_2(25), f_2(20), f_2(15), f_2(10), f_2(5), f_2(0)$

$$\begin{aligned}
 f_2(20) &= \max_{\substack{3y_1+2y_2 \leq 20 \\ y_1, y_2 \geq 0}} \{16y_1+6y_2^2\} = \max_{\substack{20-3y_1 \geq 2y_2 \\ y_1, y_2 \geq 0}} \{(16y_1)+6y_2^2\} \\
 &= \max \{0+f_1(20), 16+f_1(17), 32+f_1(14), 48+f_1(11), 64+f_1(8), 80+f_1(5), \\
 &\quad 96+f_1(2)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(30) &= \max_{\substack{3y_1+2y_2 \leq 30 \\ y_1, y_2 \geq 0}} \{0+f_1(30), 16+f_1(27), 32+f_1(24), 48+f_1(21), 64+f_1(18), 80+f_1(15), \\
 &\quad 96+f_1(12), 112+f_1(9), 128+f_1(6), 144+f_1(3), 160+f_1(0)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(25) &= \max_{\substack{3y_1+2y_2 \leq 25 \\ y_1, y_2 \geq 0}} \{16y_1+6y_2^2\} \\
 &= \max \{0+f_1(25), 16+f_1(22), 32+f_1(19), 48+f_1(16), 64+f_1(13), 80+f_1(10), \\
 &\quad 96+f_1(7), 112+f_1(4), 128+f_1(1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(15) &= \max_{\substack{3y_1+2y_2 \leq 15 \\ y_1, y_2 \geq 0}} \{16y_1+6y_2^2\} \\
 &= \max \{0+f_1(15), 16+f_1(12), 32+f_1(9), 48+f_1(6), 64+f_1(3), 80+f_1(0)\}
 \end{aligned}$$

$$f_2(10) = \max \{0+f_1(10), 16+f_1(7), 32+f_1(4), 48+f_1(1)\}$$

$$f_2(5) = \max \{0+f_1(5), 16+f_1(2)\}$$

$$f_2(0) = 0$$

要求出 $f_2(30), f_2(25), f_2(20), f_2(15), f_2(10), f_2(5), f_2(0)$; 必须先计算出 $f_1(30), f_1(27), f_1(24), f_1(25), f_1(21), f_1(22), f_1(20), f_1(19), f_1(18), f_1(17), f_1(16), f_1(15), f_1(14), f_1(13), f_1(12), f_1(11), f_1(10), f_1(9), f_1(8), f_1(7), f_1(6), f_1(5), f_1(4), f_1(3), f_1(2), f_1(1), f_1(0)$. [] 表示取整数部分.

$$f_1(30) = 6 \times 15^2 = 1350 \quad \text{则 } y_2 = 15$$

$$f_1(27) = 6 \times \left[\frac{27}{2} \right]^2 = 6 \times 13^2 = 1014 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{27}{2} \right] = 13$$

$$f_1(25) = 6 \times \left[\frac{25}{2} \right]^2 = 6 \times 12^2 = 864 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{25}{2} \right] = 12$$

$$f_1(24) = 6 \times \left[\frac{24}{2} \right]^2 = 6 \times 12^2 = 864 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{24}{2} \right] = 12$$

$$f_1(22) = 6 \times \left[\frac{22}{2} \right]^2 = 6 \times 11^2 = 726 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{22}{2} \right] = 11$$

$$f_1(21) = 6 \times \left[\frac{21}{2} \right]^2 = 6 \times 10^2 = 600 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{21}{2} \right] = 10$$

$$f_1(20) = 6 \times \left[\frac{20}{2} \right]^2 = 6 \times 10^2 = 600 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{20}{2} \right] = 10$$

$$f_1(19) = 6 \times \left[\frac{19}{2} \right]^2 = 6 \times 9^2 = 486 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{19}{2} \right] = 9$$

$$f_1(18) = 6 \times \left[\frac{18}{2} \right]^2 = 6 \times 9^2 = 486 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{18}{2} \right] = 9$$

$$f_1(17) = 6 \times \left[\frac{17}{2} \right]^2 = 6 \times 8^2 = 384 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{17}{2} \right] = 8$$

$$f_1(16) = 6 \times \left[\frac{16}{2} \right]^2 = 6 \times 8^2 = 384 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{16}{2} \right] = 8$$

$$f_1(15) = 6 \times \left[\frac{15}{2} \right]^2 = 6 \times 7^2 = 294 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{15}{2} \right] = 7$$

$$f_1(14) = 6 \times \left[\frac{14}{2} \right]^2 = 6 \times 7^2 = 294 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{14}{2} \right] = 7$$

$$f_1(13) = 6 \times \left[\frac{13}{2} \right]^2 = 6 \times 6^2 = 216 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{13}{2} \right] = 6$$

$$f_1(12) = 6 \times \left[\frac{12}{2} \right]^2 = 6 \times 6^2 = 216 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{12}{2} \right] = 6$$

$$f_1(11) = 6 \times \left[\frac{11}{2} \right]^2 = 6 \times 5^2 = 150 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{11}{2} \right] = 5$$

$$f_1(10) = 6 \times \left[\frac{10}{2} \right]^2 = 6 \times 5^2 = 150 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{10}{2} \right] = 5$$

$$f_1(9) = 6 \times \left[\frac{9}{2} \right]^2 = 6 \times 4^2 = 96 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{9}{2} \right] = 4$$

$$f_1(8) = 6 \times \left[\frac{8}{2} \right]^2 = 6 \times 4^2 = 96 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{8}{2} \right] = 4$$

$$f_1(7) = 6 \times \left[\frac{7}{2} \right]^2 = 6 \times 3^2 = 54 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$$

$$f_1(6) = 6 \times \left[\frac{6}{2} \right]^2 = 6 \times 3^2 = 54 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{6}{2} \right] = 3$$

$$f_1(5) = 6 \times \left[\frac{5}{2} \right]^2 = 6 \times 2^2 = 24 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$$

$$f_1(4) = 6 \times \left[\frac{4}{2} \right]^2 = 6 \times 2^2 = 24 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{4}{2} \right] = 2$$

$$f_1(3) = 6 \times \left[\frac{3}{2} \right]^2 = 6 \times 1^2 = 6 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{3}{2} \right] = 1$$

$$f_1(2) = 6 \times \left[\frac{2}{2} \right]^2 = 6 \times 1^2 = 6 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{2}{2} \right] = 1$$

$$f_1(1) = 6 \times \left[\frac{1}{2} \right]^2 = 6 \times 0^2 = 0 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{1}{2} \right] = 0$$

$$f_1(0) = 6 \times \left[\frac{0}{2} \right]^2 = 6 \times 0^2 = 0 \quad \text{则 } y_2 = \left[\frac{0}{2} \right] = 0$$

从而

$$\begin{aligned} f_2(30) &= \max \{ 0+f_1(30), 16+f_1(27), 32+f_1(24), 48+f_1(21), 64+f_1(18), 80+f_1(15), \\ &\quad 96+f_1(12), 112+f_1(9), 128+f_1(6), 144+f_1(3), 160+f_1(0) \} \\ &= \max \{ 1\,350, 16+1\,014, 32+864, 48+600, 64+486, 80+294, 96+216, 112+96, 128+54, 144+6, \\ &\quad 160+0 \} \end{aligned}$$

$$= \max \{ 1\ 350, 1\ 030, 896, 648, 550, 374, 312, 208, 182, 150, 160 \}$$

$$= 1\ 350$$

则 $y_1 = 0$

$$f_2(25) = \max \{ 0+f_1(25), 16+f_1(22), 32+f_1(19), 48+f_1(16), 64+f_1(13), 80+f_1(10), \\ 96+f_1(7), 112+f_1(4), 128+f_1(1) \}$$

$$= \max \{ 864, 16+726, 32+486, 48+384, 64+216, 80+150, 96+54, 112+24, 128+0 \}$$

$$= \max \{ 864+742, 512, 422, 280, 230, 150, 136, 128 \} = 864$$

则 $y_1 = 0$

同理可得

$$f_2(20) = f_1(20) = 600$$

$$f_2(15) = f_1(15) = 294$$

$$f_2(10) = \max \{ 0+f_1(10), 16+f_1(7), 32+f_1(4), 48+f_1(1) \}$$

$$= \max \{ 253, 16+144, 32+64, 48+0 \}$$

$$= \max \{ 250, 160, 96, 48 \}$$

$$= 250$$

则 $y_1 = 0$

$$f_2(5) = f_1(5) = 24$$

$$f_3(30) = f_2(30) = 1\ 350$$

于是 $y_3 = 0$

因为最优方案:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 15, \quad y_3 = 0$$

$$\max z = 1\ 350$$

然后固定 $y_1(0, 15, 0)^T$ 求出

$$\max z_2 = 3 \cdot x_2 \times 15^2 = 675x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 0$$

解之得

$$\max z_2 = 675 \times 8 = 5\ 400$$

固定 $X^{(1)} = (0, 8, 0)^T$, 再求解可得

$$Y^{(2)} = (0, 15, 0)^T$$

归纳起来, 此问题的最优解为

$$X^* = (0, 8, 0)^T, \quad Y^* = (0, 15, 0)^T$$

最优目标函数值 $z^* = 0^2 \times 0 + 3 \times 8 \times 15^2 + 4 \times 0^2 \times 0 = 5\ 400$.

10.6 设有三种资源, 每单位的成本分别为 a, b, c . 给定的利润函数为 $r_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 现有资金为 W , 应购买各种资源多少单位分配给 n 个行业, 才能使总利润最大. 试给出动态规划的公式, 并写出它的一维递推关系式.

【解】 设该问题数学模型为

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^n r_i (x_i, y_i, z_i) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + c \sum_{i=1}^n z_i \leq w \\ x_i, y_i, z_i \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

则按 n 个行业划分 n 个阶段

状态变量 s_k 表示第 1 至 k 阶段的总资金数.

决策变量 w_k 表示第 k 阶段所用资金.

状态转移方程

$$s_k = s_{k+1} - w_{k-1}$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示在 s_k 状态下第 1 至 k 阶段的最大利润, 即

$$f_k(s_k) = \max z = \sum_{i=1}^n r_i(w_i)$$

则动态规划的一维递推公式为

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \max r_1(x_1, y_1, z_1) = \max r_1(w_1) \\ f_k(s_k) &= \max \{ r_i(w_i) + f_{k-1}(s_k - w_k) \} \quad 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

10.7 若例 3 每个时期的生产数量无限制, 其余条件不变, 试解之.

【解】 将问题按 4 个时期分为 4 阶段; v_{k-1} 为状态变量, 表示第 k 阶段开始时的库存量, x_k 为决策变量, 表示第 k 阶段的生产量, d_k 为第 k 阶段对产品需求量, 状态转移方程为

$$v_k = v_{k-1} + x_k - d_k; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

最优值函数 $f_k(v_k)$ 表示第 1 阶段初始库存量为 0 至第 k 阶段末库存量为 v_k 的最小总费用.

因为第 k 时期生产成本为

$$c_k(x_k) = \begin{cases} 0 & x_k = 0 \\ 3 + x_k, & x_k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

第 k 时期末库存量为 v_k 时的存贮费用为

$$h_k(v_k) = 0.5v_k, \quad \sigma_k = v_k + d_k$$

第 k 时期总成本为 $c_k(x_k) + h_k(v_k)$

动态规划的顺序递推关系式为

$$\begin{cases} f_k(v_k) = \min_{0 \leq x_k \leq \sigma_k} [c_k(x_k) + h_k(v_k) + f_{k-1}(v_k + d_k - x_k)] & k = 2, 3, 4 \\ f_1(v_1) = \min_{x_1 = v_1 + d_1} [c_1(x_1) + h_1(v_1)] \end{cases}$$

因为

$$f_1(v_1) = 3 + (v_1 + 2) + 0.5v_1 = 5 + 1.5v_1$$

相应的最优解为 $x_1^* = v_1 + 2$

$$\text{又 } f_2(v_2) = \min_{0 \leq x_2 \leq \sigma_2} [c_2(x_2) + 0.5v_2 + f_1(v_2 + d_2 - x_2)]$$

其中 $v_2 \in [2, 6]$, 所以

$$f_2(v_2) = \begin{cases} 9.5 + 2v_2 & v_2 \in [0, 3] \quad x_2^* = 0 \\ 11 + 1.5v_2 & v_2 \in [3, 6] \quad x_2^* = v_2 + 3 \end{cases}$$

$$f_2(0) = 9.5 \quad f_2(1) = 11.5 \quad f_2(2) = 13.5 \\ f_2(3) = 15.5 \quad f_2(4) = 17 \quad f_2(5) = 18.5 \quad f_2(6) = 20$$

$$f_3(0) = \min \begin{Bmatrix} 5+9.5 \\ 4+11.5 \\ 13.5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 15.5 \\ 13.5 \end{Bmatrix} = 13.5$$

则 $x_3 = 0$

$$f_3(1) = \min \begin{Bmatrix} 6+0.5+9.5 \\ 5+0.5+11.5 \\ 4+0.5+13.5 \\ 0.5+15.5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 16 \end{Bmatrix} = 16$$

则 $x_3 = 0$ 或 3

$$f_3(2) = \min \begin{Bmatrix} 7+1+9.5 \\ 6+1+11.5 \\ 5+1+13.5 \\ 4+1+15.5 \\ 1+17 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 17.5 \\ 18.5 \\ 19.5 \\ 20.5 \\ 18 \end{Bmatrix} = 17.5$$

则 $x_3 = 4$

$$f_3(3) = \min \begin{Bmatrix} 8+1.5+9.5 \\ 7+1.5+11.5 \\ 6+1.5+13.5 \\ 5+1.5+15.5 \\ 4+1.5+17 \\ 1.5+18.5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 22.5 \\ 20 \end{Bmatrix} = 19$$

则 $x_3 = 5$

$$f_3(4) = \min \begin{Bmatrix} 9+2+9.5 \\ 8+2+11.5 \\ 7+2+13.5 \\ 6+2+15.5 \\ 5+2+17 \\ 4+2+18.5 \\ 2+20 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 20.5 \\ 21.5 \\ 22.5 \\ 23.5 \\ 24 \\ 24.5 \\ 22 \end{Bmatrix} = 20.5$$

则 $x_3 = 6$

$$f_4(0) = \min \begin{Bmatrix} 7+13.5 \\ 6+16 \\ 5+17.5 \\ 4+19 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 20.5 \\ 22 \\ 22.5 \\ 23 \end{Bmatrix} = 20.5$$

则 $x_4 = 0$

再按计算的顺序反推算,可找出每个时期的最优生产决策为:

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 6, \quad x_4^* = 0$$

最小总成本为 20.5 千元.

10.8 利用再生点性质解上题.

【解】 $c_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ 3+x_i & x_i = 1, 2, \dots, n \end{cases}, \quad h_i(v_i) = 0.5v_i$

(1) 先计算 $c(j, i), 1 \leq j \leq i, i = 1, 2, 3, 4$, 于是有

$$c(1, 1) = c(2) + h(0) = 5 + 0 = 5$$

$$c(1, 2) = c(5) + h(3) = 8 + 1.5 = 9.5$$

$$c(1, 3) = c(7) + h(5) + h(2) = 10 + 2.5 + 1 = 13.5$$

$$c(1, 4) = c(11) + h(9) + h(6) + h(4) = 14 + 4.5 + 3 + 2 = 23.5$$

$$c(2, 2) = c(3) + h(0) = 6 + 0 = 6$$

$$c(2, 3) = c(5) + h(2) = 8 + 1 = 9$$

$$c(2, 4) = c(9) + h(6) + h(4) = 12 + 3 + 2 = 17$$

$$c(3, 3) = c(2) + h(0) = 5 + 0 = 5$$

$$c(3, 4) = c(6) + h(4) = 9 + 2 = 11$$

$$c(4, 4) = c(4) + h(0) = 7 + 0 = 7$$

(2) 再计算 f_i , 有

$$f_0 = 0, \quad f_1 = f_0 + c(1, 1) = 0 + 5 = 5$$

则 $j(1) = 1, j(n)$ 为计算 f_n 时, 使 $f_s = \min_{1 \leq j \leq i} (f_{j-1} + c(j, i))$ 式右边最小的 j 值.

$$\begin{aligned} f_2 &= \min[f_0 + c(1, 2), f_1 + c(2, 2)] \\ &= \min[0 + 9.5, 5 + 6] = \min[9.5, 11] = 9.5 \end{aligned}$$

则 $j(2) = 1$

$$\begin{aligned} f_3 &= \min[f_0 + c(1, 3), f_1 + c(2, 3), f_2 + c(3, 3)] \\ &= \min[0 + 13.5, 5 + 9, 9.5 + 5] = \min[13.5, 14, 14.5] = 13.5 \end{aligned}$$

则 $j(3) = 1$

$$\begin{aligned} f_4 &= \min[f_0 + c(1, 4), f_1 + c(2, 4), f_2 + c(3, 4), f_3 + c(4, 4)] \\ &= \min[0 + 23.5, 5 + 17, 9.5 + 11, 13.5 + 7] \\ &= \min[23.5, 22, 20.5, 20.5] = 20.5 \end{aligned}$$

则 $j(4) = 3$ 或 4

(3) 最优生产决策

由于 $j(4) = 3$ 时, 有

$$x_3 = d_3 + d_4 = 6, \quad x_4 = 0$$

因 $m = j(4) - 1 = 2, \quad j(m) = j(2) = 1$

$$x_1 = d_1 + d_2 = 5, \quad x_2 = 0$$

于是方案 I 为

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 6, \quad x_4^* = 0$$

因 $m = j(4) - 1 = 3, \quad j(m) = j(3) = 1$

则 $x_1 = d_1 + d_2 + d_3 = 7, \quad x_2 = x_3 = 0$

于是方案 II 为

$$x_1^* = 7, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 4$$

10.9 某厂生产一种产品, 估计该产品在未来四个月的销售量分别为 4、5、3、2 百件. 该项产品的生

产准备费用每批为 500 元,每件的生产费用为 1 元,存贮费用每件每月为 1 元.假定 1 月初的存货为 1 百件,4 月底的存货为零.试求该厂在这 4 个月内的最优生产计划.

【解】 (1) 生产成本函数

$$c_k(x_k) = \begin{cases} 0 & x_k = 0 \\ 5 + x_k & x_k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{单位: 百件})$$

第 k 时期末库存量为 v_k 时,库存费用函数为:

$$h_k(v_k) = v_k$$

可视作凹函数,用生产点性质解此题,故第 k 时期内总成本为

$$c_k(x_k) + h_k(v_k)$$

$$c(1,1) = c(3) + h(0) = 8 + 0 = 8$$

$$c(1,2) = c(8) + h(5) = 13 + 5 = 18$$

$$c(1,3) = c(11) + h(8) + h(3) = 16 + 8 + 3 = 27$$

$$c(1,4) = c(13) + h(10) + h(5) + h(2) = 18 + 10 + 5 + 2 = 35$$

$$c(2,2) = c(5) + h(0) = 10 + 0 = 10$$

$$c(2,3) = c(8) + h(3) = 13 + 3 = 16$$

$$c(2,4) = c(10) + h(5) + h(2) = 15 + 5 + 2 = 22$$

$$c(3,3) = c(3) + h(10) = 8 + 10 = 18$$

$$c(3,4) = c(15) + h(2) = 20 + 2 = 22$$

$$c(4,4) = c(2) + h(0) = 7 + 0 = 7$$

$$(2) f_0 = 0$$

$$f_1 = f_0 + c(1,1) = 8$$

$$j(1) = 1$$

$$f_2 = \min[f_0 + c(1,2), f_1 + c(2,2)] = \min[10 + 8, 8 + 10] = \min[18, 18] = 18$$

$$j(2) = 1, 2$$

$$f_3 = \min[f_0 + c(1,3), f_1 + c(2,3), f_2 + c(3,3)]$$

$$= \min[0 + 27, 8 + 16, 18 + 8] = \min[27, 24, 26] = 24$$

$$j(3) = 2$$

$$f_4 = \min[f_0 + c(1,4), f_1 + c(2,4), f_2 + c(3,4), f_3 + c(4,4)]$$

$$= \min[0 + 35, 8 + 22, 18 + 22] = \min[35, 30, 30, 40] = 30$$

$$j(4) = 2, 3$$

(3) 1 月初原有库存 100 件外,总成本最低为 3 000 元,最优生产计划有以下三种

I : $j(4) = 2$ 时

$$x_2 = d_2 + d_3 + d_4 = 10, \quad x_3 = x_4 = 0$$

$$m = j(4) - 1 = 1, \quad j(m) = j(1) = 1, x_1 = 4 - 1 = 3$$

$$\text{即 } x_1^* = 3, x_2^* = 10, x_3^* = x_4^* = 0$$

II : $j(4) = 3$ 时

$$x_3 = d_3 + d_4 = 5, \quad x_4 = 0, m = j(4) - 1 = 2$$

$$j(m) = j(2) = 1 \text{ 时}, x_1 = 8, \quad x_2 = 0$$

$$\text{即 } x_1^* = 8, x_2^* = 0, x_3^* = 5, x_4^* = 0$$

Ⅲ: $j(4) = 3$ 时

$$x_3 = 5, \quad x_4 = 0$$

$$j(m) = 2 \text{ 时}, x_2 = 5, \quad x_1 = 3$$

$$\text{即 } x_1^* = 3, x_2^* = 5, x_3^* = 5, x_4^* = 0$$

综上所述,最优生产计划为 $(3, 10, 0, 0)$, $(8, 0, 5, 0)$ 或 $(3, 2, 5, 0)$.

10.10 某电视机厂为生产电视机而需生产喇叭,生产以万只为单位.根据以往记录,一年的四个季度需要喇叭分别是 3、2、3、2 万只.设每万只存放在仓库内一个季度的存贮费为 0.2 万元,每生产一批的装配费为 2 万元,每万只的生产成本费为 1 万元.问应该怎样安排四个季度的生产,才能使总的费用最小.

【解】 生产成本函数为:

$$c_i(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ 2 + x_i & x_i = 1, 2, 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

第 i 时期末库存量为 v_k 时的存贮费用为 $h_i(v_i) = 0.2v_i$

第 k 时期内的总成本为 $c_k(x_k) + h_k(v_k)$.

$$(1) \quad c(1, 1) = c(3) + h(0) = 5 + 0 = 5$$

$$c(1, 2) = c(5) + h(2) = 7 + 0.4 = 7.4$$

$$c(1, 3) = c(8) + h(5) + h(3) = 10 + 1 + 0.6 = 11.6$$

$$c(1, 4) = c(10) + h(7) + h(5) + h(2) = 12 + 1.4 + 1 + 0.4 = 14.8$$

$$c(2, 2) = c(2) + h(0) = 4 + 0 = 4$$

$$c(2, 3) = c(5) + h(3) = 7 + 0.6 = 7.6$$

$$c(2, 4) = c(7) + h(5) + h(2) = 9 + 1 + 0.4 = 10.4$$

$$c(3, 3) = c(3) + h(0) = 5 + 0 = 5$$

$$c(3, 4) = c(5) + h(2) = 7 + 0.4 = 7.4$$

$$c(4, 4) = c(2) + h(0) = 4 + 0 = 4$$

$$(2) \quad f_0 = 0$$

$$f_1 = f_0 + c(1, 1) = 0 + 5 = 5$$

$$j(1) = 1$$

$$f_2 = \min[f_0 + c(1, 2), f_1 + c(2, 2)]$$

$$= \min[0 + 7.4, 5 + 4] = \min[7.4, 9] = 7.4$$

$$j(2) = 1$$

$$f_3 = \min[f_0 + c(1, 3), f_1 + c(2, 3), f_2 + c(3, 3)]$$

$$= \min[0 + 11.6, 5 + 7.6, 7.4 + 5] = \min[11.6, 12.6, 12.4] = 11.6$$

$$j(3) = 1$$

$$f_4 = \min[f_0 + c(1, 4), f_1 + c(2, 4), f_2 + c(3, 4), f_3 + c(4, 4)]$$

$$= \min[0 + 14.8, 5 + 10.4, 7.4 + 7.4, 11.6 + 4]$$

$$= \min[14.8, 15.8, 14.8, 15.6] = 14.8$$

$$j(4) = 1.3$$

最小总费用为 14.8 万元.

(3) 最优生产决策为

I : $j(4) = 1$ 时, d_k 为第 k 阶段的需求量

$$x_1^* = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 10, \quad x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$$

II : $j(4) = 3$ 时

$$x_3^* = d_3 + d_4 = 5, \quad x_4^* = 0$$

由 $m = j(4) - 1 = 2$ 有 $j(m) = j(2)$

$$x_1^* = d_1 + d_2 = 5, \quad x_2^* = 0$$

综上所述, 最优生产决策为 $(10, 0, 0, 0)$ 或 $(5, 0, 5, 0)$.

10.11 某公司需要对某产品决定未来半年内每个月的最佳存贮量, 以使总费用极小化. 已知半年里对该产品的需求量和单位订货费用、单位存贮费用的数据如表 10-14 所示.

表 10-14

月份 k	1	2	3	4	5	6
需求量 d_k	50	55	50	45	40	30
单位订货费用 c_k	825	775	850	850	775	825
单位存贮费用 p_k	40	30	35	20	40	

【解】 按月份将问题划分为 6 阶段, $k = 1, 2, 3, \dots, 6$

状态变量 s_k 为第 k 阶段开始时产品的存贮量; 决策变量 u_k 为第 k 阶段订货量; d_k 为 k 阶段需求量.

状态转移方程

$$s_{k+1} = s_k + u_k - d_k$$

允许决策方程

$$D_k(s_k) = \{u_k; u_k \geq 0, d_k \leq u_k + s_k \leq \sum_{i=k}^n d_i\}$$

最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示在第 k 阶段开始时存贮为 s_k 时, 从第一至第 k 阶段 ($k = 1, 2, \dots, 6$) 的最小存贮费用.

$c(j, i)$ ($j \leq i$) 为阶段 j 到阶段 i 的总成本

(1) 按照 $c(j, i) = c_j \left(\sum_{s=j}^i d_s \right) + \sum_{s=j}^{i-1} h_s \left(\sum_{t=s+1}^i d_t \right)$ 式计算

$c(j, i), 1 \leq j \leq i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$c(1, 1) = 50 \times 825 = 41\ 250$$

$$c(1, 2) = (50 + 55) \times 825 + 40 \times 55 = 105 \times 825 + 40 \times 55 = 88\ 825$$

$$c(1, 3) = 825 \times (50 + 55 + 50) + 40 \times (55 + 50) + 30 \times 50$$

$$= 825 \times 155 + 40 \times 105 + 30 \times 50 = 127\ 875 + 4\ 200 + 1\ 500 = 133\ 575$$

$$c(1, 4) = 825 \times (50 + 55 + 50 + 45) + 40 \times (55 + 50 + 45) + 30 \times (50 + 45) + 35 \times 45$$

$$= 825 \times 200 + 40 \times 150 + 30 \times 95 + 35 \times 45$$

$$= 165\ 000 + 6\ 000 + 2\ 850 + 1\ 575 = 175\ 425$$

$$c(1, 5) = 825 \times (50 + 55 + 50 + 45 + 40) + 40 \times (55 + 50 + 45 + 40) + 30 \times (50 + 45 + 40) + 35 \times (45 + 40) + 20 \times 45$$

$$= 825 \times 240 + 40 \times 190 + 30 \times 135 + 35 \times 85 + 20 \times 45 = 213\ 425$$

$$c(1, 6) = 825 \times (50 + 55 + 50 + 45 + 40 + 30) + 40 \times (55 + 50 + 45 + 30) + 30 \times (50 + 45 + 40 + 30) + 35 \times (45 + 40 + 30)$$

$$+ 20 \times (40 + 30) + 40 \times 30$$

$$= 825 \times 270 + 40 \times 180 + 30 \times 165 + 35 \times 115 + 20 \times 70 + 40 \times 30 = 2\,413\,125$$

$$c(2,2) = 775 \times 65 = 42\,625$$

$$\begin{aligned} c(2,3) &= 775 \times (50+55) + 30 \times 50 \\ &= 775 \times 105 + 30 \times 50 = 82\,875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(2,4) &= 775 \times (55+50+45) + 30 \times (50+45) + 35 \times 45 \\ &= 775 \times 150 + 30 \times 95 + 35 \times 45 = 120\,675 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(2,5) &= 775 \times (55+50+45+40) + 30 \times (50+45+40) + 35 \times (45+40) + 20 \times 40 \\ &= 775 \times 190 + 30 \times 135 + 35 \times 85 + 20 \times 40 = 155\,075 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(2,6) &= 775 \times (55+50+45+40+30) + 30 \times (50+45+40+30) + 35 \times (45+40+30) + 20 \times (40+30) + 40 \times 30 \\ &= 775 \times 220 + 30 \times 165 + 35 \times 115 + 20 \times 70 + 40 \times 30 = 182\,075 \end{aligned}$$

$$c(3,3) = 850 \times 50 = 42\,500$$

$$c(3,4) = 850 \times (50+45) + 35 \times 45 = 82\,325$$

$$\begin{aligned} c(3,5) &= 850 \times (50+45+40) + 35 \times (45+40) + 20 \times 40 \\ &= 850 \times 135 + 35 \times 85 + 20 \times 40 = 118\,525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(3,6) &= 850 \times (50+45+40+30) + 35 \times (45+40+30) + 20 \times (40+30) + 40 \times 30 \\ &= 850 \times 165 + 35 \times 115 + 20 \times 70 + 40 \times 30 = 146\,875 \end{aligned}$$

$$c(4,4) = 850 \times 45 = 38\,250$$

$$c(4,5) = 850 \times (45+40) + 20 \times 40 = 73\,050$$

$$\begin{aligned} c(4,6) &= 850 \times (45+40+30) + 20 \times (40+30) + 40 \times 50 = 850 \times 115 + 20 \times 70 + 40 \times 50 \\ &= 101\,150 \end{aligned}$$

$$c(5,5) = 775 \times 40 = 31\,000$$

$$c(5,6) = 775 \times (40+30) + 40 \times 30 = 55\,450$$

$$c(6,6) = 825 \times 30 = 24\,750$$

(2) 递推关系式有

$$\begin{cases} f_i = \min_{1 \leq j \leq i} [f_{j-1} + c(j, i)] & i = 1, 2, \dots, 6 \\ \text{边界条件为: } f_0 = 0 \end{cases}$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = f_0 + c(1, 1) = 41\,250$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \min \{ f_0 + c(1, 2), f_1 + c(2, 2) \} = \min \{ 0 + 88\,825, 41\,250 + 42\,625 \} \\ &= \min \{ 88\,825, 83\,875 \} = 83\,875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \min \{ f_0 + c(1, 3), f_1 + c(2, 3), f_2 + c(3, 3) \} \\ &= \min \{ 133\,575, 41\,250 + 82\,875, 83\,875 + 42\,500 \} = 124\,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \min \{ f_0 + c(1, 4), f_1 + c(2, 4), f_2 + c(3, 4), f_3 + c(4, 4) \} \\ &= \min \{ 175\,425, 41\,250 + 120\,675, 83\,875 + 82\,325, 124\,125 + 38\,250 \} \\ &= \min \{ 175\,425, 161\,925, 166\,200, 162\,375 \} = 161\,925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 &= \min \{ f_0 + c(1, 5), f_1 + c(2, 5), f_2 + c(3, 5), f_3 + c(4, 5), f_4 + c(5, 5) \} \\ &= \min \{ 213\,425, 41\,250 + 155\,075, 83\,875 + 118\,525, 124\,125 + 73\,050, 161\,925 + 31\,000 \} \\ &= \min \{ 213\,425, 196\,325, 202\,400, 197\,175, 192\,925 \} = 192\,925 \end{aligned}$$

$$f_6 = \min \{ f_0 + c(1, 6), f_1 + c(2, 6), f_2 + c(3, 6), f_3 + c(4, 6), f_4 + c(5, 6), f_5 + c(6, 6) \}$$

$$= \min \{ 243\ 125, 41\ 250 + 182\ 075, 83\ 875 + 146\ 875, 124\ 125 + 101\ 150, 161\ 925 + 55\ 450, 192\ 925 + 24\ 750 \}$$

$$= \min \{ 243\ 125, 223\ 325, 230\ 750, 225\ 275, 217\ 375, 217\ 675 \} = 217\ 375$$

于是,最优决策方案为第 1 月初订货量为 50,第 3 月初订货量为 150,第 3 个月份订货量为 70.

10.12 某罐头制造公司需要在近五周内必须采购原料一批,估计在未来五周内价格有波动,其浮动价格和概率如表 10-15 所示.试求各周以什么价格购入,使采购价格的数学期望值最小.

表 10-15

单 价	概 率
9	0.4
8	0.3
7	0.3

【解】 按采购期限 5 周分 5 个阶段,将每周的价格看作该阶段的状态,即 y_k 为状态变量,表示第 k 周的实际价格.

x_k 为决策变量,当 $x_k = 1$,表示第 k 周决定订购,当 $x_k = 0$,表示第 k 周决定等待. y_{kE} 表示第 k 周决定等待,而在以后采取最优决策时采购价格的期望值.

$f_k(x_k)$ 表示第 k 周实际价格为 y_k 时,从第 k 周至第 5 周采取最优决策所得的最小期望值,逆序递推关系式为

$$f_k(y_k) = \min(y_k, y_{kE}), \quad y_k \in s_k \quad (1)$$

$$f_5(y_5) = y_5, \quad y_5 \in s_5$$

其中 $s_k = \{9, 8, 7\}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$

由 y_{kE} 和 $f_k(y_k)$ 的定义可知

$$y_{kE} = 0.4f_{k+1}(9) + 0.3f_{k+1}(8) + 0.3f_{k+1}(7) \quad (2)$$

并且得出最优决策为

$$x_k = \begin{cases} 1 & f_k(y_k) = y_k \\ 0 & f_k(y_k) = y_{kE} \end{cases} \quad (3)$$

从最后一周开始,逐步向前递推计算,具体计算过程如下:

$k=5$ 时,因

$$f_5(y_5) = y_5, \quad y_5 \in s_5$$

故有

$$f_5(9) = 9; \quad f_5(8) = 8; \quad f_5(7) = 7$$

即在第五周时,若所需的原料尚未买入,则无论市场价格如何,都必须采购,不能再等.

$k=4$ 时,由

$$y_{4E} = 0.4f_{k+1}(9) + 0.3f_{k+1}(8) + 0.3f_{k+1}(7)$$

知

$$y_{4E} = 0.4 \times 9 + 0.3 \times 8 + 0.3 \times 7 = 8.1$$

于是由①式得

$$f_4(y_4) = \min_{y_4 \in s_4} \{ y_4, y_{4E} \} = \min_{y_4 \in s_4} \{ y_4, 8.1 \} = \begin{cases} 8.1, & y_4 = 9 \\ 8, & y_4 = 8 \\ 7, & y_4 = 7 \end{cases}$$

由③式可知,第四周的最优决策为

$$x_4 = \begin{cases} 1 & y_4 = 8 \text{ 或 } 7 \\ 0 & y_4 = 9 \end{cases}$$

同理求得

$$y_{3E} = 0.4f_{4E}(8, 1) + 0.3f_{4E}(8) + 0.3f_{4E}(7) = 0.4 \times 8.1 + 0.3 \times 8 + 0.3 \times 7 = 7.74$$

$$f_3(g_3) = \min_{y_3 \in s_3} \{y_3, y_{3E}\} = \min_{y_3 \in s_3} \{y_3, 7.74\} = \begin{cases} 7.74 & y_3 = 9 \text{ 或 } 8 \\ 7 & y_3 = 7 \end{cases}$$

$$\text{则 } x_3 = \begin{cases} 1 & y_3 = 7 \\ 0 & y_3 = 9 \text{ 或 } 8 \end{cases}$$

$$y_{2E} = (0.4 + 0.7) \times 7.74 + 0.3 \times 7 = 7.518$$

$$f_2(y_2) = \min_{y_2 \in s_2} \{y_2, y_{2E}\} = \min_{y_2 \in s_2} \{y_2, 7.518\} = \begin{cases} 7 & y_2 = 7 \\ 7.518 & y_2 = 9 \text{ 或 } 8 \end{cases}$$

$$\text{则 } x_2 = \begin{cases} 1 & y_2 = 7 \\ 0 & y_2 = 9 \text{ 或 } 8 \end{cases}$$

$$f_{1E} = (0.4 + 0.3) \times 7.518 + 0.3 \times 7 = 7.3626$$

$$\text{则 } x_1 = \begin{cases} 1 & y_1 = 7 \\ 0 & y_1 = 9 \text{ 或 } 8 \end{cases}$$

则最优策略为:在第1、2、3周时,若价格为7就采购,否则,就等待,在第4周时,价格为8或7应采购,否则就等待;在第5周时,无论什么价格都要采购。

依照上述最优政策进行采购时,价格(单价)的数学期望为

$$0.7 \times 7.3626 + 0.3 \times 7 = 7.25382$$

10.13 求下列问题的最优解

$$(1) \max z = 10x_1 + 22x_2 + 17x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0 \text{ 且为整数 } (i=1, 2, 3) \end{cases}$$

$$(2) \max z = x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_i \geq 0 \text{ 且为整数 } (i=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

$$(3) \max z = 4x_1 + 5x_2 + 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 13 \\ x_i \geq 0, \text{ 且为整数 } (i=1, 2, 3) \end{cases}$$

$$(4) \max z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 20 \\ x_i \geq 0 \text{ 且为整数 } (i=1, 2, 3) \end{cases}$$

其中 x_i 与 $g_i(x_i)$ 的关系如表 10-16 所示。

表 10-16

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g_1(x_1)$	2	4	7	11	13	15	18	22	18	15	11
$g_2(x_2)$	5	10	15	20	24	18	12	9	5	3	1
$g_3(x_3)$	8	12	17	22	19	16	14	11	9	7	4

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad (1) \quad f_3(20) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2+3x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0}} \{10x_1+22x_2+17x_3\} \\
 &= \max_{\substack{20-3x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0}} \left\{ 17x_3 + \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 20-3x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}} (10x_1+22x_2) \right\} \\
 &= \max_{x_2=0,1,2,3,4,5,6} \{17x_3+f_2(20-3x_3)\} \\
 &= \max \{0+f_2(20), 17+f_2(17), 34+f_2(14), 51+f_2(11), 68+f_2(8), 85+f_2(5), 102+f_2(2)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(20) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{\substack{2x_1 \leq 20-4x_2 \\ x_1 \geq 0}} \{10x_1+(22x_2)\} \\
 &= \max_{\substack{20-4x_2 \geq 0, x_2 \geq 0}} \{22x_2 + \max_{\substack{2x_1 \leq 20-4x_2 \\ x_1 \geq 0}} (10x_1)\} = \max_{x_2=0,1,2,3,4,5} \{22x_2+f_1(20-4x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(20), 22+f_1(16), 44+f_1(12), 66+f_1(8), 88+f_1(4), 110+f_1(0)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(17) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} \\
 &= \max_{x_2=0,1,2,3} \{f_1(17), 22+f_1(13), 44+f_1(9), 66+f_1(5), 88+f_1(1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(14) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{x_2=0,1,2,3} \{22x_2+f_1(14-4x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(x_4); 22+f_1(10), 44+f_1(6), 66+f_1(2)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(11) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{x_2=0,1,2} \{22x_2+f_1(11-4x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(11), 22+f_1(7), 44+f_1(3)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(8) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{x_2=0,1,2} \{22x_2+f_1(8-4x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(8), 22+f_1(4), 44+f_1(0)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(5) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{x_2=0,1} \{22x_2+f_1(5-4x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(5); 22+f_1(1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(2) &= \max_{\substack{2x_1+4x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{10x_1+22x_2\} = \max_{x_1=0} \{22x_2+f_1(24x_2)\} = f_1(2)
 \end{aligned}$$

$$f_1(w) = \max_{\substack{2x_1 \leq w \\ x_1 \geq 0}} (10x_1) = 10 \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor$$

$$f_1(20) = 10 \times 10 = 100 \quad (x_1 = 10)$$

$$f_1(17) = 10 \times 8 = 80 \quad (x_2 = 8)$$

$$f_1(16) = 10 \times 8 = 80 \quad (x_1 = 8)$$

$$f_1(13) = 10 \times 6 = 60 \quad (x_1 = 6)$$

$$f_1(12) = 10 \times 6 = 60 \quad (x_1 = 6)$$

$$f_1(14) = 10 \times 7 = 70 \quad (x_1 = 7)$$

$$f_1(11) = 10 \times 5 = 50 \quad (x_1 = 5)$$

$$f_1(9) = 10 \times 4 = 40 \quad (x_1 = 4)$$

$$f_1(7) = 10 \times 3 = 30 \quad (x_1 = 3)$$

$$f_1(5) = 10 \times 2 = 20 \quad (x_1 = 2)$$

$$f_1(3) = 10 \times 1 = 10 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(1) = 10 \times 0 = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$f_1(10) = 10 \times 5 = 50 \quad (x_1 = 5)$$

$$f_1(8) = 10 \times 4 = 40 \quad (x_1 = 4)$$

$$f_1(6) = 10 \times 3 = 30 \quad (x_1 = 3)$$

$$f_1(4) = 10 \times 2 = 20 \quad (x_1 = 2)$$

$$f_1(2) = 10 \times 1 = 10 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(0) = 10 \times 0 = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$f_2(20) = \max \{100, 102, 104, 106, 108, 110\} = 110 \quad (x_1 = 0, x_2 = 5)$$

$$f_2(17) = \max \{80, 82, 84, 86, 88\} = 88 \quad (x_1 = 0, x_2 = 4)$$

$$f_2(14) = \max \{70, 72, 74, 76\} = 76 \quad (x_1 = 1, x_2 = 3)$$

$$f_2(11) = \max \{50, 52, 54\} = 54 \quad (x_1 = 1, x_2 = 2)$$

$$f_2(8) = \max \{40, 42, 44\} = 44 \quad (x_1 = 0, x_2 = 3)$$

$$f_2(5) = \max \{20, 22\} = 22 \quad (x_1 = 0, x_2 = 1)$$

$$f_2(2) = 10 \quad (x_1 = 1, x_2 = 0)$$

则

$$\begin{aligned} f_3(20) &= \max \{0+110, 17+88, 34+76, 51+54, 68+44, 85+22, 102+10\} \\ &= \max \{110, 105, 110, 105, 112, 107, 112\} \\ &= 112 \end{aligned}$$

故最优方案有两个

$$\text{I} : x_1^* = 0, \quad x_2^* = 3, \quad x_3^* = 4$$

$$\text{II} : x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 6$$

(2) 用动态规划方法来解,即要求 $f_4(11)$

$$\begin{aligned} f_4(11) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leq 11 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4\} = \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leq 11 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{x_1 \times x_2 \times x_3 \times (x_4)\} \\ &= \max_{\substack{11-2x_4 \geq 0 \\ x_4 \geq 0}} \{x_4 \times \max_{2x_1+3x_2+x_3 \leq 11-2x_4} (x_1 \times x_2 \times x_3)\} \\ &= \max_{x_4=0,1,2,3,4,5} \{x_4 \times \max_{2x_1+3x_2+x_3 \leq 11-2x_4} [x_1 \times x_2 \times x_3]\} \\ &= \max \{0 \times f_3(11), f_2(9), 2f_3(7), 3f_3(5), 4f_3(3), 5f_3(1)\} \end{aligned}$$

则要计算 $f_4(11)$ 必须计算出

$$f_3(9), f_3(7), f_3(5), f_3(3) \text{ 和 } f_3(1)$$

$$f_3(9) = \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3 \leq 9 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{x_1 \times x_2 \times x_3\} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 9-3x_2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{x_1 \times x_3 \times (x_2)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\substack{9-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{ (x_2) \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 9-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_2 \times x_3] \} = \max_{x_2=0,1,2,3} \{ (x_2) \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 9-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max \{ 0 \times f_2(9), f_2(6), 2f_2(3), 3f_2(0) \} \\
&= \max \{ 0, f_2(6), 2f_2(3), 3f_2(0) \} \\
f_3(7) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3 \leq 7 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_2 \times x_3 \} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 7-3x_2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_3 \times (x_2) \} \\
&= \max_{\substack{7-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 7-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} = \max_{x_2=0,1,2,3} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 7-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max \{ 0, f_2(7), 1f_2(4), 2f_2(1) \} \\
f_3(5) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_2 \times x_3 \} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 5-3x_2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_3 \times (x_2) \} \\
&= \max_{\substack{5-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 5-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} = \max \{ 0 \times f_2(5), 1 \times f_2(2) \} \\
&= \max \{ 0, f_2(2) \} \\
f_3(3) &= \max_{\substack{3x_1+3x_2+x_3 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_2 \times x_3 \} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 3-3x_2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_3 \times (x_2) \} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 3-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 3-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max_{\substack{x_2=0,1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 3-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max \{ 0 \times f_2(3), 1 \times f_2(0) \} = \max \{ 0, f_2(0) \} \\
f_3(1) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2+x_3 \leq 1 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_2 \times x_3 \} = \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 1-3x_2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{ x_1 \times x_3 \times (x_2) \} \\
&= \max_{\substack{1-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 1-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max_{\substack{x_2=0 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_2 \times \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 1-3x_2 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] \} \\
&= \max \{ 0 \times f_2(1) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

要计算 $f_3(9), f_3(7), f_3(8), f_3(3), f_3(1)$, 则要算出 $f_2(6), f_2(4), f_2(3), f_2(1), f_2(0)$.

$$\begin{aligned}
f_2(6) &= \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 6 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [x_1 \times x_3] = \max_{\substack{x_3 \leq 6-2x_1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [(x_1) \times x_3] \\
&= \max_{\substack{6-2x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0}} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 6-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} = \max_{x_2=0,1,2,3} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 6-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} \\
&= \max \{ 0 \times f_1(6), 1 \times f_1(4), 2 \times f_1(2), 3 \times f_1(0) \} \\
&= \max \{ 0, f_1(4), 2f_1(2), 3f_1(0) \} \\
f_2(4) &= \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 4 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_1 \times x_3 \} = \max_{\substack{x_3 \leq 4-2x_1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ (x_1) \times x_3 \} \\
&= \max_{\substack{4-2x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0}} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 4-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} = \max_{x_1=0,1,2} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 4-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \{ 0 \times f_1(4), 1 \times f_1(2), 2 \times f_1(0) \} \\
&= \max \{ 0, f_1(2), 2f(0) \} \\
f_2(3) &= \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 3 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_1 \times x_3 \} = \max_{\substack{x_3 \leq 3-2x_1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [(x_1), x_3] \\
&= \max_{\substack{3-2x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0}} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 3-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} = \max_{x_1=0,1} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 3-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} \\
&= \max \{ 0 \times f_1(3), 1 \times f_1(1) \} \\
&= \max \{ 0, f_1(1) \} \\
f_2(2) &= \max \{ 0 \times f_1(3), 1 \times f_1(0) \} \\
f_2(1) &= \max_{\substack{2x_1+x_3 \leq 1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} \{ x_1 \times x_3 \} = \max_{\substack{x_3 \leq 1-2x_1 \\ x_1, x_3 \geq 0}} [(x_1), x_3] \\
&= \max_{\substack{1-2x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0}} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 1-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} = \max_{x_1=0} \{ x_1 \times \max_{\substack{x_3 \leq 1-2x_1 \\ x_3 \geq 0}} [x_3] \} \\
&= \max \{ 0, f_2(1) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

同理得 $f_2(0) = 0$

为了算出 $f_2(6), f_2(4), f_2(3), f_2(1), f_2(0)$. 要先算 $f_1(6), f_1(4), f_1(2), f_1(1), f_1(0)$.

$$f_1(6) = 6 \quad (x_3 = 6)$$

$$f_1(4) = 4 \quad (x_3 = 4)$$

$$f_1(2) = 2 \quad (x_3 = 2)$$

$$f_1(1) = 1 \quad (x_3 = 1)$$

$$f_1(0) = 0 \quad (x_3 = 0)$$

从而

$$\begin{aligned}
f_2(6) &= \max \{ 0, 4, 2x_2, 3x_0 \} = 4 \quad (x_1 = 1 \text{ 或 } x_1 = 2) \\
f_2(4) &= \max \{ 0, f_1(2), 2f(0) \} = \max \{ 0, 2, 0 \} = 2 \quad (x_1 = 1) \\
f_2(3) &= \max \{ 0, f_1(1) \} = \max \{ 0, 1 \} = 1 \quad (x_1 = 1) \\
f_2(2) &= 0 \\
f_2(1) &= 0 \quad (x_1 = 0) \\
f_3(9) &= \max \{ 0, f_2(6), 2f_2(3), 3f_2(0) \} \\
&= \max \{ 0, 4, 2 \times 1, 3 \times 0 \} \\
&= \max \{ 0, 4, 2, 0 \} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$x_2 = 1$$

$$f_3(7) = \max \{ 0, f_2(4), 2f_2(1) \} = \max \{ 0, 2, 0 \} = 2$$

所以 $x_2 = 1$

$$f_3(5) = \max \{ 0, f_2(2) \} = 0 \quad (x_2 = 1)$$

$$f_3(3) = \max \{ 0, f_2(0) \} = 0 \quad (x_2 = 1)$$

$$f_3(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 f_4(11) &= \max \{0, f_3(9), 2f_3(7), 3f_3(5), 4f_3(3), 5f_3(1)\} \\
 &= \max \{0, 4, 2 \times 2, 3 \times 0, 4 \times 0, 5 \times 0\} \\
 &= \max \{0, 4, 4, 0, 0, 0\} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

所以 $x_4 = 1, x_4 = 2$

当 $x_3 = 4, x_1 = 1, x_2 = 1, x_4 = 1$ 时, $f_4(11) = 4$

当 $x_3 = 2, x_1 = 2, x_2 = 1, x_4 = 1$ 时, $f_4(11) = 4$

当 $x_3 = 2, x_1 = 1, x_2 = 1, x_4 = 2$ 时, $f_4(11) = 4$

故最优解有三个, 即

$$X^* = (1, 1, 4, 1)^T \text{ 或 } X^* = (2, 1, 2, 1)^T \text{ 或 } X^* = (1, 1, 2, 2)^T$$

最优值均为 $z_{\max} = 4$.

(3) 用动态规划方法求解, 其思想方法与一维背包问题完全类似, 只是这时的状态变量是两个, 而决策变量仍是一个, 问题变为求 $f_3(10, 13)$

$$\begin{aligned}
 f_3(10, 13) &= \max_{\substack{x_1+x_2+x_3 \leq 10 \\ x_1+3x_2+6x_3 \leq 13 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{4x_1+5x_2+8x_3\} = \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 10-x_3 \\ x_1+3x_2 \leq 13-6x_3 \\ x_i \geq 0}} \{4x_1+5x_2+(8x_3)\} \\
 &= \max_{\substack{10-x_3 \geq 0 \\ 13-6x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0}} \{8x_3 + \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 10-x_3 \\ x_1+3x_2 \leq 13-6x_3 \\ x_i \geq 0, x_2 \geq 0}} [4x_1+5x_2]\} \\
 &= \max_{0 \leq x_3 \leq \min\left(\left[\frac{10}{1}\right], \left[\frac{13}{6}\right]\right)} \{8x_3 + \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 10-x_3 \\ x_1+3x_2 \leq 13-6x_3 \\ x_1, x_2 \geq 0}} [4x_1+5x_2]\} \\
 &= \max \{8x_0+f_2(10, 13), 8 \times 1+f_2(9, 7), 8 \times 2+f_2(8, 1)\} \\
 &= \max \{f_2(10, 13), 8+f_2(9, 7), 16+f_2(8, 1)\}
 \end{aligned}$$

要算 $f_3(10, 13)$, 必先算 $f_2(10, 13), f_2(9, 7), f_2(8, 1)$.

$$\begin{aligned}
 f_2(10, 13) &= \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 10 \\ x_1+3x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{4x_1+5x_2\} = \max_{\substack{x_1 \leq 10-x_2 \\ x_1 \leq 13-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{(5x_2)+4x_1\} \\
 &= \max_{\substack{10-x_2 \geq 0 \\ 13-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{5x_2 + \max_{\substack{x_1 \leq 10-x_2 \\ x_1 \leq 13-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} [4x_1]\} = \max_{0 \leq x_2 \leq \min\left[\frac{10}{1}, \frac{10}{3}\right]} \{5x_2 + \max_{\substack{x_1 \leq 10-x_2 \\ x_1 \leq 13-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} [4x_1]\} \\
 &= \max \{0+f_1(10, 13), 5+f_1(9, 10), 10+f_1(8, 7), 15+f_1(7, 4), 20+f_1(6, 1)\} \\
 &= \max \{f_1(10, 13), 5+f_1(9, 10), 10+f_1(8, 7), 15+f_1(7, 4), 20+f_1(6, 1)\} \\
 f_2(9, 7) &= \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 9 \\ x_1+3x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{4x_1+5x_2\} = \max_{\substack{x_1 \leq 9-x_2 \\ x_1 \leq 7-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{(5x_2)+4x_1\} \\
 &= \max_{\substack{9-x_2 \geq 0 \\ 7-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{(5x_2) + \max_{\substack{x_1 \leq 9-x_2 \\ x_1 \leq 7-3x_2 \\ x_1 \geq 0}} [4x_1]\} = \max_{0 \leq x_2 \leq \min\left(\left[\frac{9}{1}\right], \left[\frac{7}{3}\right]\right)} \{(5x_2) + \max_{\substack{x_1 \leq 9-x_2 \\ x_1 \leq 7-3x_2 \\ x_1 \geq 0}} [4x_1]\} \\
 &= \max \{5 \times 0+f_1(9, 7), 5 \times 1+f_1(8, 4), 5 \times 2+f_1(7, 1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \{f_1(9,1), 5+f_1(8,4), 10+f_1(7,1)\} \\
f_2(8,1) &= \max_{\substack{x_1+x_2 \leq 8 \\ x_1+5x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{4x_1+5x_2\} = \max_{\substack{x_1 \leq 8-x_2 \\ x_1 \leq 1-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{4x_1+(5x_2)\} \\
&= \max_{\substack{8-x_2 \geq 0 \\ 1-3x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{5x_2 + \max_{\substack{x_1 \leq 8-2x_2 \\ x_1 \leq 1-3x_2 \\ x_1 \geq 0}} [4x_1]\} \\
&= \max_{0 \leq x_2 \leq \min\left(\left[\frac{8}{1}\right], \left[\frac{1}{3}\right]\right)} \{5x_2 + \max_{\substack{x_1 \leq 8-x_2 \\ x_1 \leq 1-3x_2 \\ x_1 \geq 0}} [4x_1]\} \\
&= \max \{0+f_1(8,1)\}
\end{aligned}$$

要算 $f_2(10,13)$, $f_2(9,7)$, $f_2(8,1)$, 必先算 $f_1(10,13)$, $f_1(9,10)$, $f_1(8,7)$, $f_1(7,4)$, $f_1(6,1)$, $f_1(9,7)$, $f_1(8,4)$, $f_1(7,1)$, $f_1(8,1)$

$$f_1(10,13) = \max_{\substack{x_1 \leq 10 \\ x_1 \leq 13 \\ x_1 \geq 0}} \{4x_1\} = 4 \times 10 = 40$$

则 $x_1 = 10$

同理可求

$$f_1(9,10) = 4 \times 9 = 36 \quad \text{则 } x_1 = 9$$

$$f_1(8,7) = 4 \times 7 = 28 \quad \text{则 } x_1 = 7$$

$$f_1(7,4) = 4 \times 4 = 16 \quad \text{则 } x_1 = 4$$

$$f_1(6,1) = 4 \times 1 = 4 \quad \text{则 } x_1 = 1$$

$$f_1(9,7) = 4 \times 7 = 28 \quad \text{则 } x_1 = 7$$

$$f_1(8,4) = 4 \times 4 = 16 \quad \text{则 } x_1 = 4$$

$$f_1(7,1) = 4 \times 1 = 4 \quad \text{则 } x_1 = 1$$

$$f_1(8,1) = 4 \times 1 = 4 \quad \text{则 } x_1 = 1$$

从而

$$\begin{aligned}
f_2(10,13) &= \max \{f_1(10,13), 5+f_1(9,10), 10+f_1(8,7), 15+f_1(7,4), 20+f_1(6,1)\} \\
&= \max \{40, 5+36, 10+28, 15+16, 20+4\} \\
&= \max \{40, 41, 38, 31, 24\} = 41
\end{aligned}$$

则 $x_2 = 1$

$$f_2(8,1) = \max \{0+f_1(8,1)\} = \max \{0+4\} = 4$$

则 $x_2 = 0$

$$\begin{aligned}
f_3(10,13) &= \max \{0+f_2(10,13), 8+f_2(9,7), 16+f_2(8,1)\} \\
&= \max \{41, 8+28, 16+4\} = \max \{41, 36, 20\} = 41
\end{aligned}$$

则 $x_3 = 0$

则最优方案为

$$x_3^* = 0, x_2^* = 1, x_1^* = 9, \quad \max z = 4 \times 9 + 5 \times 1 - 8 \times 0 = 41.$$

(4) 用动态方法解即要求 $f_3(20)$

$$\begin{aligned}
f_3(20) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 20 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)\} = \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 20-x_3^2 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3}} \{g_3(x_3) + g_1(x_1) + g_2(x_2)\} \\
&= \max_{\substack{20-x_3^2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0}} \{g_3(x_3) + \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 20-x_3^2 \\ x_i \geq 0, i=1,2}} [g_1(x_1) + g_2(x_2)]\} \\
&= \max_{x_3=0,1,2,3,4} \{g_3(x_3) + \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 20-x_3^2 \\ x_i \geq 0, i=1,2}} [g_1(x_1) + g_2(x_2)]\} \\
&= \max \{g_3(0) + f_2(20), g_3(1) + f_2(19), g_3(2) + f_2(16), g_3(3) + f_2(11), g_3(4) + f_2(4)\} \\
&= \max \{8 + f_2(20), 12 + f_2(19), 17 + f_2(16), 22 + f_2(11), 19 + f_2(4)\}
\end{aligned}$$

要算 $f_3(20)$, 必先算 $f_2(20)$, $f_2(19)$, $f_2(16)$, $f_2(11)$, $f_2(4)$,

$$\begin{aligned}
f_2(20) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} = \max_{\substack{x_1^2 \leq 20-x_2^2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + g_1(x_1)\} \\
&= \max_{\substack{20-x_2^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 20-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max_{x_2=0,1,2,3,4} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 20-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max \{g_2(0) + f_1(20), g_2(1) + f_1(19), g_2(2) + f_1(16), g_2(3) + f_1(11), g_2(4) + f_1(4)\} \\
&= \max \{5 + f_1(20), 10 + f_1(19), 15 + f_1(16), 20 + f_1(11), 24 + f_1(4)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(19) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 19 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} = \max_{\substack{x_1^2 \leq 19-x_2^2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} \\
&= \max_{\substack{19-x_2^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 19-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max_{x_2=0,1,2,3,4} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 19-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max \{g_2(0) + f_1(19), g_2(1) + f_1(18), g_2(2) + f_1(15), g_2(3) + f_1(10), g_2(4) + f_1(3)\} \\
&= \max \{5 + f_1(19), 10 + f_1(18), 15 + f_1(15), 20 + f_1(10), 24 + f_1(3)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(16) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} = \max_{\substack{x_1^2 \leq 16-x_2^2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} \\
&= \max_{\substack{16-x_2^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 16-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max_{x_2=0,1,2,3,4} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 16-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max \{g_2(0) + f_1(16), g_2(1) + f_1(15), g_2(2) + f_1(12), g_2(3) + f_1(7), g_2(4) + f_1(0)\} \\
&= \max \{5 + f_1(16), 10 + f_1(15), 15 + f_1(12), 20 + f_1(7), 24 + f_1(0)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(11) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2)\} = \max_{\substack{x_1^2 \leq 11-x_2^2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + g_1(x_1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\substack{11-x_2^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 11-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max_{x_1=0,1,2,3} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 11-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max \{g_2(0)+f_1(11), g_2(1)+f_1(10), g_2(2)+f_1(7), g_2(3)+f_1(2)\} \\
&= \max \{5+f_1(11), 10+f_1(10), 15+f_1(7), 20+f_1(2)\} \\
f_2(4) &= \max_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{g_1(x_1)+g_2(x_2)\} = \max_{\substack{x_1^2 \leq 4-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} \{g_2(x_2)+g_1(x_1)\} \\
&= \max_{\substack{4-x_2^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0}} \{y_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 4-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max_{x_2=0,1,2} \{g_2(x_2) + \max_{\substack{x_1^2 \leq 4-x_2^2 \\ x_1 \geq 0}} [g_1(x_1)]\} \\
&= \max \{g_2(0)+f_1(4), y_2(1)+f_1(3), g_2(2)+f_1(0)\} \\
&= \max \{5+f_1(4), 10+f_1(3), 15+f_1(0)\}
\end{aligned}$$

则要计算 $f_2(20), f_2(19), f_2(16), f_2(11), f_2(4)$, 先必算 $f_1(20), f_1(19), f_1(18), f_1(16), f_1(18), f_1(11), f_1(10), f_1(7), f_1(4), f_1(3), f_1(0)$

$$f_1(20) = \max_{x_1^2 \leq 20} \{g_1(x_1)\} = g_1(4) = 13$$

则 $x_1 = 4$

同理可求

$$\begin{aligned}
f_1(19) &= g_1(4) = 13 & \text{则 } x_1 &= 4 \\
f_1(18) &= g_1(4) = 13 & \text{则 } x_1 &= 4 \\
f_1(16) &= g_1(4) = 13 & \text{则 } x_1 &= 4 \\
f_1(15) &= g_1(3) = 11 & \text{则 } x_1 &= 3 \\
f_1(12) &= g_1(3) = 11 & \text{则 } x_1 &= 3 \\
f_1(11) &= g_1(3) = 11 & \text{则 } x_1 &= 3 \\
f_1(10) &= g_1(3) = 11 & \text{则 } x_1 &= 3 \\
f_1(7) &= g_1(2) = 7 & \text{则 } x_1 &= 2 \\
f_1(4) &= g_1(2) = 7 & \text{则 } x_1 &= 2 \\
f_1(3) &= g_1(1) = 4 & \text{则 } x_1 &= 1 \\
f_1(0) &= g_1(0) = 2 & \text{则 } x_1 &= 0 \\
f_1(2) &= g_1(1) = 4 & \text{则 } x_1 &= 1
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
f_2(19) &= \max \{5+f_1(19), 10+f_1(18), 15+f_1(15), 20+f_1(10), 24+f_1(3)\} \\
&= \max \{5+13, 10+13, 15+11, 20+11, 24+4\} \\
&= \max \{18, 23, 26, 31, 28\} = 31
\end{aligned}$$

则 $x_2 = 3$

$$\begin{aligned}
 f_2(20) &= \max \{ 5+f_1(20), 10+f_1(19), 15+f_1(16), 20+f_1(11), 24+f_1(4) \} \\
 &= \max \{ 5+13, 10+13, 15+13, 20+11, 24+7 \} \\
 &= \max \{ 18, 23, 28, 31, 31 \} = 31
 \end{aligned}$$

则 $x_2 = 3$ 或 $x_2 = 4$

$$\begin{aligned}
 f_2(16) &= \max \{ 5+f_1(16), 10+f_1(15), 15+f_1(12), 20+f_1(7), 24+f_1(10) \} \\
 &= \max \{ 5+13, 10+11, 15+11, 20+7, 24+2 \} \\
 &= \max \{ 18, 21, 26, 27, 26 \} = 26
 \end{aligned}$$

则 $x_2 = 3$

$$\begin{aligned}
 f_2(11) &= \max \{ 5+f_1(11), 10+f_1(10), 15+f_1(7), 20+f_1(2) \} \\
 &= \max \{ 5+11, 10+11, 15+7, 20+4 \} \\
 &= \max \{ 16, 21, 22, 24 \} = 24
 \end{aligned}$$

则 $x_2 = 3$

$$\begin{aligned}
 f_2(4) &= \max \{ 5+f_1(4), 10+f_1(3), 15+f_1(0) \} \\
 &= \max \{ 5+7, 10+4, 15+2 \} \\
 &= \max \{ 12, 14, 17 \} = 17
 \end{aligned}$$

则 $x_2 = 2$. 因此

$$\begin{aligned}
 f_3(20) &= \max \{ 8+f_2(20), 12+f_2(19), 17+f_2(16), 22+f_2(11), 19+f_2(4) \} \\
 &= \max \{ 8+31, 12+31, 17+27, 22+24, 19+17 \} \\
 &= \max \{ 39, 43, 44, 46, 36 \} = 46
 \end{aligned}$$

最优方案为 $x_1^* = 2, x_2^* = 3, x_3^* = 2$,

则 $\max z = f_3(20) = 46$

10.14 某工厂生产三种产品,各产品重量与利润关系如表 10-17 所示.现将此三种产品运往市场出售,运输能力总重量不超过 6 吨.问如何安排运输使总利润最大.

表 10-17

种 类	1	2	3
重 量	2	3	4
利 润	80	130	180

【解】 设三种产品其运输重量分别为 x_1, x_2, x_3 , 由题意得模型为

$$\begin{aligned}
 \max z &= 80x_1 + 130x_2 + 180x_3 \\
 &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \text{ 为整数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

用动态规划方法求解,此问题变为求 $f_3(6)$, 其中 $f_k(s_k)$ 表示当载重量为 s_k 时,采取最优决策装载第 k 种至第 n 种货物所得的最大利润.

$$\begin{aligned}
 f_3(6) &= \max_{\substack{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0}} \{ 180x_3 + \max_{\substack{2x_1 + 3x_2 \leq 6 - 4x_3 \\ x_1, x_2 \geq 0}} (80x_1 + 130x_2) \} \\
 &= \max \{ 180x_3 + f_2(6 - 4x_3) \} \\
 &= \max \{ f_2(6), 180 + f_2(2) \}
 \end{aligned}$$

要计算 $f_3(6)$, 必须先计算 $f_2(6)$ 和 $f_2(2)$

$$\begin{aligned}
 f_2(6) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{80x_1+130x_2\} = \max_{\substack{2x_1 \leq 6-2x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{80x_1+(130x_2)\} \\
 &= \max_{x_2=0,1,2} \{130x_2+f_1(6-3x_2)\} \\
 &= \max \{f_1(6), 130+f_1(3), 260+f_1(0)\} \\
 f_2(2) &= \max_{\substack{2x_1+3x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{80x_1+130x_2\} = \max_{\substack{2x_1 \leq 2-3x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{80x_1+130x_2\} \\
 &= \max \{130x_2+f_1(2-3x_2)\} = f_1(2)
 \end{aligned}$$

为了计算出 $f_2(6)$ 和 $f_2(2)$, 必须先计算出 $f_1(0)$, $f_1(2)$, $f_1(3)$, $f_1(6)$

$$f_1(w) = \max_{\substack{2x_1 \leq w \\ x_1 \geq 0}} (80x_1) = 80[w/2]$$

$$f_1(6) = 80 \times 3 = 240 \quad (x_1 = 3)$$

$$f_1(3) = 80 \times 1 = 80 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(2) = 80 \times 1 = 80 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(0) = 80 \times 0 = 0 \quad (x_1 = 0)$$

故

$$f_2(6) = \max \{240, 210, 260\} = 260 \quad (x_1 = 0, x_2 = 2)$$

$$f_2(2) = 80 \quad (x_1 = 1, x_2 = 0)$$

$$f_3(6) = \max \{260, 260\} = 260$$

运输方案有二:

$$\text{I} : x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2, \quad x_3^* = 0$$

$$\text{II} : x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1$$

即总利润最大为 260.

10.15 某工厂在一年进行了 A、B、C 三种新产品试制, 由于资金不足, 估计在年内这三种新产品研制不成功的概率分别为 0.40、0.60、0.80, 因而都研制不成功的概率为 $0.40 \times 0.60 \times 0.80 = 0.192$. 为了促进三种新产品的研制, 决定增拨 2 万元的研制费, 并要资金集中使用, 以万元为单位进行分配. 其增拨研制费与新产品不成功的概率如表 10-18 所示. 试问如何分配费用, 使这三种新产品都研制不成功的概率为最小.

表 10-18

研制费 S \ 新产品	不成功概率		
	A	B	C
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

【解】 分为三个阶段, 状态变量 s_k 表示第 k 种产品至第 n 种产品的研制费用, x_k 表示第 k 种产品研制费用, $p_k(x_k)$ 表示给 k 种产品补加研制费 x_k 后的不成功概率. 模型为:

$$\min z = \prod_{i=1}^3 p_i(x_i)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_i \geq 0 \text{ 且为整数}$$

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min_{0 \leq x_k \leq s_k} [p_k(x_k) \times f_{k+1}(s_k - x_k)], & k=3, 2, 1 \\ f_4(s_4) = 1 \end{cases}$$

第三阶段, 设 s_3 万元 ($s_3 = 0, 1, 2$) 全部分配给新产品 C , 则不成功概率为

$$f_3(s_3) = \min_{x_3=s_3} [p_3(x_3) \times 0.4 \times 0.6]$$

其计算值如表 10-19 所示.

表 10-19

$s_3 \backslash x_3$	$p_3(x_3)$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2		
0	0.8			0.8	0
1		0.5		0.5	1
2			0.3	0.3	2

第二阶段, 设 s_2 万元 ($s_2 = 0, 1, 2$) 全部分配给新产品 B, C , 则不成功的概率为

$$f_2(s_2) = \min_{0 \leq x_2 \leq s_2} [p_2(x_2) \times f_3(s_2 - x_2)]$$

其计算值如表 10-20 所示.

表 10-20

$s_2 \backslash x_2$	$p_2(x_2) \cdot f_3(s_2 - x_2)$			$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2		
0	0.6×0.8			0.6×0.8=0.48	0
1	0.6×0.5	0.4×0.8		0.30	0
2	0.6×0.3	0.4×0.5	0.2×0.8	0.16	2

第一阶段, 设 $s_1 = 2$ 万元, 全部分配给新产品 A, B, C , 则不成功的概率为

$$f_1(2) = \min_{0 \leq x_1 \leq 2} [p_1(x_1) \times f_2(2 - x_1)]$$

其计算值如表 10-21 所示.

表 10-21

$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	$f_1(2)$	x_1^*
2	0.4×0.016	0.2×0.3	0.15×0.48	0.06	1

故 $x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 1, f_1(2) = 0.06$

即 A 产品分配 1 万元, B 产品不分配, C 产品分配 1 万元, 这三种产品都研究不成功的概率最小为

$0.2 \times 0.6 \times 0.5 = 0.06$.

10.16 某一印刷厂有六项加工任务,对印刷车间和装订车间所需时间(单位:天)如表 10-22 所示,试求最优的加工顺序和总加工天数.

表 10-22

任务 车间	J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	J ₅	J ₆
印刷车间	3	10	5	2	9	11
装订车间	8	12	9	6	5	2

【解】 工件的加工工时矩阵为：

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 5 & 2 & 9 & 11 \\ 8 & 12 & 9 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{按最优排序规则排序}} \begin{matrix} J_4 & J_1 & J_3 & J_2 & J_5 & J_6 \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 10 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 9 & 12 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

则最优加工顺序为

$$J_4 \rightarrow J_1 \rightarrow J_3 \rightarrow J_2 \rightarrow J_5 \rightarrow J_6$$

总加工时间为 44 天。

10.17 试制订五年中的一台机器更新策略,使总收入达到最大. 设 $\alpha = 1, T = 2$, 有关数据如表 10-23 所示。

表 10-23

产品年代 机龄 项目	第一年					第二年				第三年		
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2
收 入	20	19	18	16	14	25	23	22	20	27	24	22
运行费用	4	4	6	6	8	3	4	6	7	3	3	4
更新费用	25	27	30	32	35	27	29	32	34	29	30	31
产品年代 机龄 项目	第四年		第五年	期 前								
	0	1	0	2	3	4	5	6				
收 入	28	26	30	16	14	14	12	12				
运行费用	2	3	2	6	6	7	7	8				
更新费用	30	31	32	30	32	34	34	36				

【解】 由题意 $\alpha = 1, T = 2, n = 5$

$I_j(t)$ 为在第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器运行所得收入；

$O_j(t)$ 为在第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器运行所需费用；

$C_j(t)$ 为第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器更新所需的更新净费用。

$g_j(t)$ 是第 j 年开始使用役龄为 t 年的机器时,从第 j 至第 5 年的最佳收入。

$x_j(t)$ 表示给出 $g_j(t)$ 时,在第 j 年开始时的决策。

得递推关系式为

$$g_j(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_j(0) - O_j(0) - C_j(t) + g_{j+1}(1) \\ K: I_j(t) - O_j(t) + g_{j+1}(t+1) \end{bmatrix}$$

其中“K”是 keep 的缩写,表示保留使用,“R”是 Replacement 的缩写表示更新机器。

其中

$$g_6(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5; \quad t = 1, 2, \dots, j-1$$

当 $j=5$ 时

$$g_5(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_5(0) - O_5(0) - C_5(t) + 1 \cdot g_6(1) \\ K: I_5(t) - O_5(t) + g_6(t+1) \end{bmatrix}$$

$$y_5(1) = \max \begin{bmatrix} R: 30 - 2 - 31 = -3 \\ K: 26 - 3 = 23 \end{bmatrix} = 23$$

则 $x_5(1) = K$

$$g_5(2) = \max \begin{bmatrix} R: 30 - 2 - 31 = -3 \\ K: 22 - 4 = 18 \end{bmatrix} = 18$$

则 $x_5(2) = K$

$$g_5(3) = \max \begin{bmatrix} R: 30 - 2 - 34 = -6 \\ K: 20 - 7 = 13 \end{bmatrix} = 13$$

则 $x_5(3) = K$

$$g_5(4) = \max \begin{bmatrix} R: 30 - 2 - 35 = -7 \\ K: 14 - 8 = 6 \end{bmatrix} = 6$$

则 $x_5(4) = K$

$$g_5(6) = \max \begin{bmatrix} R: 30 - 2 - 36 = -8 \\ K: 12 - 8 = 4 \end{bmatrix} = 4$$

则 $x_5(6) = K$

当 $j=4$ 时

$$g_4(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_4(0) - O_4(0) - C_4(t) + g_5(1) \\ K: I_4(t) - O_4(t) - g_5(t+1) \end{bmatrix}$$

$$g_4(1) = \max \begin{bmatrix} R: 28 - 2 - 30 + 23 = 19 \\ K: 24 - 3 + 18 = 39 \end{bmatrix} = 39$$

则 $x_4(1) = K$

$$g_4(2) = \max \begin{bmatrix} R: 28 - 2 - 32 + 23 = 17 \\ K: 22 - 6 + 13 = 29 \end{bmatrix} = 29$$

则 $x_4(2) = K$

$$g_4(3) = \max \begin{bmatrix} R: 28 - 2 - 32 + 23 = 17 \\ K: 16 - 6 + 6 = 16 \end{bmatrix} = 17$$

则 $x_4(3) = R$

$$g_4(5) = \max \begin{bmatrix} R: 28 - 2 - 34 + 23 = 15 \\ K: 12 - 7 + 4 = 9 \end{bmatrix} = 15$$

当 $j=3$ 时

$$g_3(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_3(0) - O_3(0) - C_3(t) + g_4(1) \\ K: I_3(t) - O_3(t) + g_4(t+1) \end{bmatrix}$$

$$g_3(1) = \max \begin{bmatrix} R: 27 - 3 - 29 + 39 = 34 \\ K: 23 - 4 + 29 = 48 \end{bmatrix} = 48$$

则 $x_3(1) = K$

$$g_3(2) = \max \begin{bmatrix} R: 27-3-30+39=33 \\ K: 18-6+17=29 \end{bmatrix} = 33$$

则 $x_3(2) = R$

$$g_3(4) = \max \begin{bmatrix} R: 27-3-34+39=29 \\ K: 14-7+15=32 \end{bmatrix} = 29$$

则 $x_3(4) = R$

当 $j=2$ 时

$$g_2(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_2(0) - O_2(0) - C_2(t) + g_3(1) \\ K: I_2(t) - O_2(t) + g_3(t+1) \end{bmatrix}$$

$$g_2(1) = \max \begin{bmatrix} R: 25-3-27+48=43 \\ K: 19-4+33=48 \end{bmatrix} = 48$$

则 $x_2(1) = K$

$$g_2(3) = \max \begin{bmatrix} R: 25-3-32+48=38 \\ K: 14-6+29=37 \end{bmatrix} = 38$$

当 $j=1$ 时

$$g_1(t) = \max \begin{bmatrix} R: I_1(0) - O_1(0) - C_1(t) + g_2(1) \\ K: I_1(t) - O_1(t) + g_2(t+1) \end{bmatrix}$$

$$g_1(2) = \max \begin{bmatrix} R: 20-4-30+48=34 \\ K: 16-6+38=48 \end{bmatrix} = 48$$

则 $x_1(2) = K$

故最大总收入为 48, 根据上面计算过程反推之, 可求得最佳策略见表 10-24.

表 10-24

年度	1	2	3	4	5
机龄	2	3	1	2	3
最佳决策	K	R	K	K	K

10.18 求解六个城市旅行推销员问题. 其距离矩阵如表 10-25 所示. 设推销员从 1 城出发, 经过每个城市一次且仅一次, 最后回到 1 城. 问按怎样的路线走, 使总的行程最短.

表 10-25

距离 $j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	40	50
2	12	0	18	30	25	21
3	23	9	0	5	10	15
4	34	32	4	0	8	16
5	45	27	11	10	0	18
6	56	22	16	20	12	0

【解】 从 1 城出发最后回到 1 城中间要经过五个城市, 因此划分 n 个阶段 ($n=1, 2, 3, 4, 5$)

由于规定推销员是从城市 1 开始的, 设推销员走到 i 城, 记 $N_i = \{2, 3, 4, \dots, i, i+1, \dots, n\}$ 表示 1 城到 i 城中间城市集合.

S 表示到达 i 城之前中途所经过的城市的集合, 则有 $S \subseteq N_i$

因此, 可选取 (i, S) 作为描述过程的状态变量, 决策为由一个城市走到另一个城市, 并定义最优值函数 $f_k(i, S)$ 为从 1 城开始经由 k 个中间城市的 S 集到 i 城的最短路线的距离, 则可写出动态规划的递推关系为

$$f_k(i, S) = \min_{j \in S} [f_{k-1}(j, S \setminus \{j\}) + d_{ji}],$$

$$k=1, 2, \dots, 5, i=2, 3, \dots, 6, S \subseteq N_i$$

边界条件为 $f_0(i, \phi) = d_{1i}$, $p_k(i, S)$ 为最优决策函数, 它表示从 1 城开始经 k 个中间城市的 S 集到 i 城的最短路线上紧挨着 i 城前面的那个城市.

由边界条件可知

$$f_0(2, \phi) = d_{12} = 10$$

$$f_0(3, \phi) = d_{13} = 20$$

$$f_0(4, \phi) = d_{14} = 30$$

$$f_0(5, \phi) = d_{15} = 40$$

$$f_0(6, \phi) = d_{16} = 50$$

当 $k=1$ 时, 即从 1 城开始, 中间经过一个城市到达 i 城的最短距离是:

$$f_1(2, \{3\}) = f_0(3, \phi) + d_{32} = 20 + 9 = 29$$

$$f_1(2, \{4\}) = f_0(4, \phi) + d_{42} = 30 + 32 = 62$$

$$f_1(2, \{5\}) = f_0(5, \phi) + d_{52} = 40 + 27 = 67$$

$$f_1(2, \{6\}) = f_0(6, \phi) + d_{62} = 50 + 22 = 72$$

$$f_1(3, \{2\}) = f_0(2, \phi) + d_{23} = 10 + 18 = 28$$

$$f_1(3, \{4\}) = f_0(4, \phi) + d_{43} = 30 + 4 = 34$$

$$f_1(3, \{5\}) = f_0(5, \phi) + d_{53} = 40 + 11 = 51$$

$$f_1(3, \{6\}) = f_0(6, \phi) + d_{63} = 50 + 16 = 66$$

$$f_1(4, \{2\}) = f_0(2, \phi) + d_{24} = 10 + 30 = 40$$

$$f_1(4, \{3\}) = f_0(3, \phi) + d_{34} = 20 + 5 = 25$$

$$f_1(4, \{5\}) = f_0(5, \phi) + d_{54} = 40 + 10 = 50$$

$$f_1(4, \{6\}) = f_0(6, \phi) + d_{64} = 50 + 20 = 70$$

$$f_1(5, \{2\}) = f_0(2, \phi) + d_{25} = 10 + 25 = 35$$

$$f_1(5, \{3\}) = f_0(3, \phi) + d_{35} = 20 + 10 = 30$$

$$f_1(5, \{4\}) = f_0(4, \phi) + d_{45} = 30 + 8 = 38$$

$$f_1(5, \{6\}) = f_0(6, \phi) + d_{65} = 50 + 12 = 62$$

$$f_1(6, \{2\}) = f_0(2, \phi) + d_{26} = 10 + 21 = 31$$

$$f_1(6, \{3\}) = f_0(3, \phi) + d_{36} = 20 + 15 = 35$$

$$f_1(6, \{4\}) = f_0(4, \phi) + d_{46} = 30 + 16 = 46$$

$$f_1(6, \{5\}) = f_0(5, \phi) + d_{56} = 40 + 18 = 58$$

当 $k=2$ 时, 即从 1 城开始, 中间经过两个城市 (它们顺序随便) 到达 i 城的最短距离是:

$$\begin{aligned} f_2(2, \{3, 4\}) &= \min \{f_1(3, \{4\}) + d_{32}, f_1(4, \{3\}) + d_{42}\} \\ &= \min \{34+9, 25+32\} = \min \{43, 57\} = 43 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{3, 4\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_2(2, \{3, 5\}) &= \min \{f_1(3, \{5\}) + d_{32}, f_1(5, \{3\}) + d_{52}\} \\ &= \min \{51+9, 30+27\} = \min \{60, 57\} = 57 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{3, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(2, \{3, 6\}) &= \min \{f_1(3, \{6\}) + d_{32}, f_1(6, \{3\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{66+9, 35+22\} = \min \{75, 57\} = 57 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{3, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(2, \{4, 5\}) &= \min \{f_1(4, \{5\}) + d_{42}, f_1(5, \{4\}) + d_{52}\} \\ &= \min \{50+32, 38+27\} = \min \{82, 65\} = 65 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{4, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(2, \{4, 6\}) &= \min \{f_1(4, \{6\}) + d_{42}, f_1(6, \{4\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{70+32, 46+22\} = \min \{102, 68\} = 68 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{4, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(2, \{5, 6\}) &= \min \{f_1(5, \{6\}) + d_{52}, f_1(6, \{5\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{62+27, 58+22\} = \min \{89, 80\} = 80 \end{aligned}$$

则 $p_2(2, \{5, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(3, \{2, 4\}) &= \min \{f_1(2, \{4\}) + d_{23}, f_1(4, \{2\}) + d_{43}\} \\ &= \min \{62+18, 40+4\} = \min \{80, 44\} = 44 \end{aligned}$$

则 $p_2(3, \{2, 4\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(3, \{2, 6\}) &= \min \{f_1(2, \{6\}) + d_{23}, f_1(6, \{2\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{72+18, 31+16\} = \min \{90, 47\} = 47 \end{aligned}$$

则 $p_2(3, \{2, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(3, \{4, 5\}) &= \min \{f_1(4, \{5\}) + d_{43}, f_1(5, \{4\}) + d_{53}\} \\ &= \min \{50+4, 38+11\} = \min \{54, 49\} = 49 \end{aligned}$$

则 $p_2(3, \{4, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(3, \{4, 6\}) &= \min \{f_1(4, \{6\}) + d_{43}, f_1(6, \{4\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{70+4, 46+16\} = \min \{74, 60\} = 60 \end{aligned}$$

则 $p_2(3, \{4, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(3, \{5, 6\}) &= \min \{f_1(5, \{6\}) + d_{53}, f_1(6, \{5\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{62+11, 58+16\} = \min \{73, 74\} = 73 \end{aligned}$$

则 $p_2(3, \{5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{2, 3\}) &= \min \{f_1(2, \{3\}) + d_{24}, f_1(3, \{2\}) + d_{34}\} \\ &= \min \{29+30, 28+5\} = \min \{59, 33\} = 33 \end{aligned}$$

所以 $p_2(4, \{2, 3\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{2, 5\}) &= \min \{f_1(2, \{5\}) + d_{24}, f_1(5, \{2\}) + d_{54}\} \\ &= \min \{67+30, 35+10\} = \min \{97, 45\} = 45 \end{aligned}$$

则 $p_2(4, \{2, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{2, 6\}) &= \min \{f_1(2, \{6\}) + d_{24} f_1(6, \{23\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{72+30, 31+20\} = \min \{102, 51\} = 51 \end{aligned}$$

则 $p_2(4, \{2, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{3, 5\}) &= \min \{f_1(3, \{5\}) + d_{34} f_1(5, \{3\}) + d_{54}\} \\ &= \min \{51+8, 30+10\} = \min \{56, 40\} = 40 \end{aligned}$$

则 $p_2(4, \{3, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{3, 6\}) &= \min \{f_1(3, \{6\}) + d_{34} f_1(6, \{3\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{66+5, 35+20\} = \min \{71, 55\} = 55 \end{aligned}$$

则 $p_2(4, \{3, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(4, \{5, 6\}) &= \min \{f_1(5, \{6\}) + d_{54} f_1(6, \{5\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{62+10, 58+20\} = \min \{72, 78\} = 72 \end{aligned}$$

则 $p_2(4, \{5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(f_1, \{2, 3\}) &= \min \{f_1(2, \{3\}) + d_{25} f_1(3, \{2\}) + d_{35}\} \\ &= \min \{29+25, 28+10\} = \min \{54, 38\} = 38 \end{aligned}$$

则 $p_2(5, \{2, 3\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_2(5, \{2, 4\}) &= \min \{f_1(2, \{4\}) + d_{35} f_1(4, \{2\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{72+25, 31+12\} = \min \{97, 43\} = 43 \end{aligned}$$

则 $p_2(5, \{2, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(5, \{3, 4\}) &= \min \{f_1(3, \{4\}) + d_{35} f_1(4, \{3\}) + d_{45}\} \\ &= \min \{34+10, 25+8\} = \min \{44, 33\} = 33 \end{aligned}$$

则 $p_2(5, \{3, 4\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_2(5, \{3, 6\}) &= \min \{f_1(3, \{6\}) + d_{35} f_1(6, \{3\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{66+10, 35+12\} = \min \{76, 47\} = 47 \end{aligned}$$

则 $p_2(5, \{3, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(5, \{4, 6\}) &= \min \{f_1(4, \{6\}) + d_{45} f_1(6, \{4\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{70+8, 46+12\} = \min \{78, 58\} = 58 \end{aligned}$$

则 $p_2(5, \{4, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{2, 3\}) &= \min \{f_1(2, \{3\}) + d_{26} f_1(3, \{2\}) + d_{36}\} \\ &= \min \{29+21, 28+18\} = \min \{50, 43\} = 43 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{2, 3\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{2, 4\}) &= \min \{f_1(2, \{4\}) + d_{46} f_1(4, \{2\}) + d_{46}\} \\ &= \min \{62+21, 40+16\} = \min \{83, 56\} = 56 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{2, 4\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{2, 5\}) &= \min \{f_1(2, \{5\}) + d_{26} f_1(5, \{2\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{67+21, 35+18\} = \min \{88, 53\} = 53 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{2, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{3, 4\}) &= \min \{f_1(3, \{4\}) + d_{36} f_1(4, \{3\}) + d_{46}\} \\ &= \min \{34+15, 25+16\} = \min \{49, 41\} = 41 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{3, 4\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{3, 5\}) &= \min \{f_1(3, \{5\}) + d_{36} \cdot f_1(5, \{3\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{51 + 15, 30 + 18\} = \min \{66, 48\} = 48 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{3, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_2(6, \{4, 5\}) &= \min \{f_1(4, \{5\}) + d_{46} \cdot f_1(5, \{4\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{50 + 16, 38 + 18\} = \min \{66, 56\} = 56 \end{aligned}$$

则 $p_2(6, \{4, 5\}) = 5$

当 $k=3$ 时, 即从 1 城开始, 中间经过三个城市(顺序随便)回到 i 城的最短距离是:

$$\begin{aligned} f_3(2, \{3, 4, 5\}) &= \min \{f_2(3, \{4, 5\}) + d_{32} \cdot f_2(4, \{3, 5\}) + d_{42} \cdot f_2(5, \{3, 4\}) + d_{52}\} \\ &= \min \{49 + 9, 40 + 32, 33 + 27\} = \min \{58, 72, 60\} = 58 \end{aligned}$$

则 $p_3(2, \{3, 4, 5\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_3(2, \{3, 4, 6\}) &= \min \{f_2(3, \{4, 6\}) + d_{32} \cdot f_2(4, \{3, 6\}) + d_{42} \cdot f_2(6, \{3, 4\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{60 + 9, 55 + 32, 41 + 22\} = \min \{69, 87, 63\} = 63 \end{aligned}$$

则 $p_3(2, \{3, 4, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_3(2, \{3, 5, 6\}) &= \min \{f_2(3, \{5, 6\}) + d_{32} \cdot f_2(5, \{3, 6\}) + d_{52} \cdot f_2(6, \{3, 5\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{73 + 9, 47 + 27, 48 + 22\} = \min \{82, 74, 70\} = 70 \end{aligned}$$

则 $p_3(2, \{3, 5, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_3(2, \{4, 5, 6\}) &= \min \{f_2(4, \{5, 6\}) + d_{42} \cdot f_2(5, \{4, 6\}) + d_{52} \cdot f_2(6, \{4, 5\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{72 + 32, 58 + 27, 56 + 22\} = \min \{104, 85, 78\} = 78 \end{aligned}$$

则 $p_3(2, \{4, 5, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_3(3, \{2, 4, 5\}) &= \min \{f_2(2, \{4, 5\}) + d_{23} \cdot f_2(4, \{2, 5\}) + d_{43} \cdot f_2(5, \{2, 4\}) + d_{53}\} \\ &= \min \{65 + 18, 45 + 4, 48 + 11\} = \min \{83, 49, 59\} = 49 \end{aligned}$$

则 $p_3(3, \{2, 4, 5\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(3, \{2, 4, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{4, 6\}) + d_{23} \cdot f_2(4, \{2, 6\}) + d_{43} \cdot f_2(6, \{2, 4\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{68 + 18, 51 + 4, 56 + 16\} = \min \{56, 55, 72\} = 55 \end{aligned}$$

则 $p_3(3, \{2, 4, 6\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(3, \{2, 5, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{5, 6\}) + d_{23} \cdot f_2(5, \{2, 6\}) + d_{53} \cdot f_2(6, \{2, 5\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{80 + 18, 43 + 11, 53 + 16\} = \min \{98, 54, 69\} = 54 \end{aligned}$$

则 $p_3(3, \{2, 5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(3, \{4, 5, 6\}) &= \min \{f_2(4, \{5, 6\}) + d_{43} \cdot f_2(5, \{4, 6\}) + d_{53} \cdot f_2(6, \{4, 5\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{72 + 4, 58 + 11, 56 + 16\} = \min \{76, 69, 72\} = 69 \end{aligned}$$

则 $p_3(3, \{4, 5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(4, \{2, 3, 5\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 5\}) + d_{24} \cdot f_2(3, \{2, 5\}) + d_{34} \cdot f_2(5, \{2, 3\}) + d_{54}\} \\ &= \min \{57 + 30, 46 + 5, 38 + 10\} \\ &= \min \{87, 51, 48\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

则 $p_3(4, \{2, 3, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(4, \{2, 3, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 6\}) + d_{24} \cdot f_2(3, \{2, 6\}) + d_{34} \cdot f_2(6, \{2, 3\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{57 + 30, 47 + 5, 43 + 20\} = \min \{87, 52, 63\} = 52 \end{aligned}$$

则 $p_3(4, \{2, 3, 6\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_3(4, \{2, 5, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{5, 6\}) + d_{24} f_2(5, \{2, 6\}) + d_{54} f_2(6, \{2, 5\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{80+30, 43+10, 53+20\} = \min \{110, 53, 73\} = 53 \end{aligned}$$

则 $p_3(4, \{2, 5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(4, \{3, 5, 6\}) &= \min \{f_2(3, \{5, 6\}) + d_{34} f_2(5, \{3, 6\}) + d_{54} f_2(6, \{3, 5\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{73+5, 47+10, 48+20\} = \min \{78, 57, 68\} = 57 \end{aligned}$$

则 $p_3(4, \{3, 5, 6\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(5, \{2, 3, 4\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 4\}) + d_{25} f_2(3, \{2, 4\}) + d_{35} f_2(4, \{2, 3\}) + d_{45}\} \\ &= \min \{43+25, 44+10, 33+8\} = \min \{68, 54, 41\} = 41 \end{aligned}$$

则 $p_3(5, \{2, 3, 4\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(5, \{2, 4, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{4, 6\}) + d_{25} f_2(4, \{2, 6\}) + d_{48} f_2(6, \{2, 4\}) + d_{48}\} \\ &= \min \{68+25, 51+8, 56+12\} = \min \{93, 59, 68\} = 59 \end{aligned}$$

则 $p_3(5, \{2, 4, 6\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(5, \{2, 3, 6\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 6\}) + d_{25} f_2(3, \{2, 6\}) + d_{35} f_2(6, \{2, 3\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{57+25, 47+10, 43+12\} = \min \{82, 57, 55\} = 55 \end{aligned}$$

则 $p_3(5, \{2, 3, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_3(5, \{3, 4, 6\}) &= \min \{f_2(3, \{4, 6\}) + d_{35} f_2(4, \{3, 6\}) + d_{45} f_2(6, \{3, 4\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{60+10, 55+8, 41+12\} = \min \{70, 63, 53\} = 53 \end{aligned}$$

则 $p_3(5, \{3, 4, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_3(6, \{2, 3, 4\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 4\}) + d_{26} f_2(3, \{2, 4\}) + d_{36} f_2(4, \{2, 3\}) + d_{46}\} \\ &= \min \{43+21, 44+15, 33+16\} = \min \{64, 59, 49\} = 49 \end{aligned}$$

则 $p_3(6, \{2, 3, 4\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(6, \{2, 3, 5\}) &= \min \{f_2(2, \{3, 5\}) + d_{26} f_2(3, \{2, 5\}) + d_{36} f_2(5, \{2, 3\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{57+21, 46+15, 38+18\} = \min \{78, 61, 56\} = 56 \end{aligned}$$

则 $p_3(6, \{2, 3, 5\}) = 5$

$$\begin{aligned} f_3(6, \{2, 4, 5\}) &= \min \{f_2(2, \{4, 5\}) + d_{26} f_2(4, \{2, 5\}) + d_{46} f_2(5, \{2, 4\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{65+21, 45+16, 48+18\} = \min \{86, 61, 66\} = 61 \end{aligned}$$

则 $p_3(6, \{2, 4, 5\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_3(6, \{3, 4, 5\}) &= \min \{f_2(3, \{4, 5\}) + d_{36} f_2(4, \{3, 5\}) + d_{46} f_2(5, \{3, 4\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{49+65, 40+16, 33+18\} = \min \{114, 56, 51\} = 51 \end{aligned}$$

则 $p_3(6, \{3, 4, 5\}) = 5$

当 $k=4$ 时, 即从 1 城开始, 中间经过四个城市, 回到 i 城的最短距离是:

$$\begin{aligned} f_4(2, \{3, 4, 5, 6\}) &= \min \{f_3(3, \{4, 5, 6\}) + d_{32} f_3(4, \{3, 5, 6\}) + d_{42} f_3(5, \{3, 4, 6\}) + d_{52} f_3(6, \{3, 4, 5\}) + d_{62}\} \\ &= \min \{69+9, 57+32, 53+27, 51+22\} = \min \{78, 89, 80, 73\} = 73 \end{aligned}$$

则 $p_4(2, \{3, 4, 5, 6\}) = 6$

$$\begin{aligned} f_4(3, \{2, 4, 5, 6\}) &= \min \{f_3(2, \{4, 5, 6\}) + d_{23} f_3(4, \{2, 5, 6\}) + d_{43} f_3(5, \{2, 4, 6\}) + d_{53} f_3(6, \{2, 4, 5\}) + d_{63}\} \\ &= \min \{78+18, 53+4, 59+11, 61+16\} = \min \{96, 57, 70, 77\} = 57 \end{aligned}$$

则 $p_4(3, \{2, 4, 5, 6\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_4(4, \{2, 3, 5, 6\}) &= \min \{f_3(2, \{3, 5, 6\}) + d_{24}, f_3(3, \{2, 5, 6\}) + d_{34}, f_3(5, \{2, 3, 6\}) + d_{54}, f_3(6, \{2, 3, 5\}) + d_{64}\} \\ &= \min \{70+30, 54+10, 55+10, 50+20\} = \min \{100, 64, 65, 70\} = 59 \end{aligned}$$

则 $p_4(4, \{2, 3, 5, 6\}) = 3$

$$\begin{aligned} f_4(5, \{2, 3, 4, 6\}) &= \min \{f_3(2, \{3, 4, 6\}) + d_{25}, f_3(3, \{2, 4, 6\}) + d_{35}, f_3(4, \{2, 3, 6\}) + d_{45}, f_3(6, \{2, 3, 4\}) + d_{65}\} \\ &= \min \{63+25, 55+10, 52+8, 49+12\} = \min \{88, 65, 60, 61\} = 60 \end{aligned}$$

则 $p_4(5, \{2, 3, 4, 6\}) = 4$

$$\begin{aligned} f_4(6, \{2, 3, 4, 5\}) &= \min \{f_3(2, \{3, 4, 5\}) + d_{26}, f_3(3, \{2, 4, 5\}) + d_{36}, f_3(4, \{2, 3, 5\}) + d_{46}, f_3(5, \{2, 3, 4\}) + d_{56}\} \\ &= \min \{58+21, 49+15, 48+16, 41+18\} = \min \{79, 64, 64, 59\} = 59 \end{aligned}$$

则 $p_4(6, \{2, 3, 4, 5\}) = 5$

当 $k=5$ 时, 即从 1 城开始, 中间经过五个城市, 回到 1 城的最短距离是:

$$\begin{aligned} f_5(1, \{2, 3, 4, 5, 6\}) &= \min \{f_4(2, \{3, 4, 5, 6\}) + d_{21}, f_4(3, \{2, 4, 5, 6\}) + d_{31}, f_4(4, \{2, 3, 5, 6\}) + d_{41}, f_4(5, \{2, 3, 4, 6\}) + d_{51}, f_4(6, \{2, 3, 4, 5\}) + d_{61}\} \\ &= \min \{73+12, 57+23, 59+34, 60+45, 59+56\} \\ &= \min \{85, 80, 93, 105, 105\} = 80 \end{aligned}$$

则 $p_5(1, \{2, 3, 4, 5, 6\}) = 3$

综合前面的递推过程

$$P_4(3, \{2, 4, 5, 6\}) = 4$$

$$P_3(4, \{2, 5, 6\}) = 5$$

$$P_2(5, \{2, 6\}) = 6$$

$$P_1(6, \{2\}) = 2$$

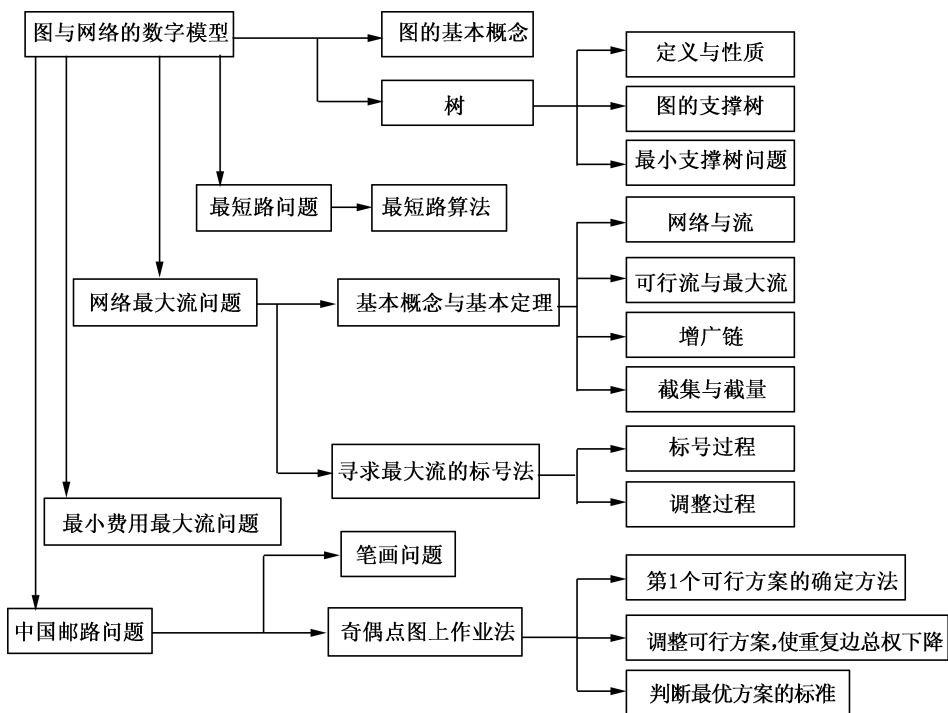
由此可知推销员最短路线为:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

最短总距离为 80(单位).

第 11 章 图与网络优化

知识结构图



学习要求

1. 了解图与树的基本概念.
2. 掌握最小部分树的求法(避圈法和破圈法)
3. 理解并掌握贝尔曼最优化原理及其在网络规划中的应用.
4. 掌握网络最短路线问题及“ T, P ”标号法.
5. 掌握网络最大流与最小割的概念及其求法.

重点、难点解答

1. 最短路问题是图论中十分重要的最优化问题之一.他经常被用于解决生产实际中诸如管线铺设、线路安排、工厂布局、设备更新等优化问题.

在最短路问题中,当 D 中所有的权 $w_{ij} \geq 0$ 时,可以用 Dijkstra 算法求解最短路问题.Dijkstra 算法不仅适用于赋权有向图 D ,也运用于赋权无向图 G .

Dijkstra 算法的基本思想为:采用 T 标号和 P 标号两种标号,其中 T (Temporary)为临时标号 P (Permanent)为永久性标点当给 v_i 点一个标号时,表示从 v_s 到 v_i 点的最短路的权值,而且 v_i 点的标号不再改

变.若给 v_i 点一个 T 标号时,表示从 v_s 到 v_i 的估计最短路径权值的上界,是一种临时标号.在 D 中凡没有得到 P 标号的点都有 T 标号.算法每一步都把某一点的 T 标号改为 P 标号,当终点 v_t 得到 P 标号时,全部计算结束.

具体计算步骤为:

(1) 给 v_s 以 P 标号 $(0,0)$,其余各点均给 T 标号 $c_j=+\infty, k_j=M$ (M 表示 D 中暂不含 v_s 到 v_j 的路).

(2) 若 v_k 点为刚得到的 P 标号,则选取所有与 v_k 有关联的弧 (v_k, v_j) 中的 v_j 点,且 v_j 点为 T 标号.对 v_j 点的标号中的 c_j 进行如下更改:

$$c_j = \min \{ l_j, l_k + w_{kj} \}$$

若更改后的 $c_j = c_k + w_{kj}$,则修改 $k_j = k$,否则 k_j 不变.

(3) 比较所有具有 T 标号的点 v_j ,把 l_j 最小者改为 P 标号,当存在两个以上者,可同时改为 P 标号.若全部点(若 D 中从 V_s 到 V 之间无路,则 V 点除外)均为 P 标号,则停止,否则转入(2).

2. 最大流问题

寻求网络 D 中从发点 V_s 到收点 V_t 的最大流的方法,一般采用 Ford-Fulkerson 标号法.该算法首先从一个可行流 f 出发(若网络中没有给定 f ,则可以设 f 是零流).将网络 D 中的所有点分为标号点和未标号点,其中对于标号点又分为已检查和待检查两种.标号包含两部分:第一部分表明标号是从哪一点得到,以便找出增广链.第二部分是为了确定增广链的调整量 θ .

Ford-Fulkerson 标号法的具体计算步骤如下:

(1) 给发点 v_s 赋予标号 $(0, +\infty)$, v_s 则为已标号待检查的点.

(2) 取一个已标号待检查的点 v_i ,对所有与 v_i 相邻而未标号的点 v_j .

① 若在弧 (v_i, v_j) 上 $f_{ij} < c_{ij}$,则 v_j 标号 $(v_i, l(v_j))$.

其中 $l(v_j) = \min \{ l(v_i), c_{ij} - f_{ij} \}$.

若 $f_{ij} = c_{ij}$,则不给 v_j 标号.

② 若在弧 (v_j, v_i) 上 $f_{ji} > 0$,则给 v_j 标号 $(-v_i, l(v_j))$.

其中 $l(v_j) = \min \{ l(v_i), f_{ji} \}$.

若 $f_{ji} = 0$,则不给 v_j 标号:

当所有与 v_j 相邻而未标号的点 v_j 都执行完上述过程后, v_i 成为已标号并检查过的点.

(3) 重复(2)可能有两种结果:

① 收点 v_t 被标号,表明得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ ,则转入(4);

② 若所有标号都已检查过,而标号过程进行不下去,则计算结束,得网络最大流.

(4) 取调数量 $\theta = l(v_t)$ (即 v_t 标号的第 2 部分)

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta(v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta(v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}(v_i, v_j) \in \mu \end{cases}$$

删除原有标号,对新的可行流 f'_{ij} 重新从(1)开始标号过程.

课后习题全解

11.1 证明如下序列不可能是某个简单图的次的序列:

(1) 7, 6, 5, 4, 3, 2.

(2) 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

(3) 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1.

【解】(1) 由定理 1,图中所有点的次之和是边数的两倍,即

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

而在此序列中

$$\sum d(v) = 7 + 6 + 5 + 4 + 2 = 27$$

为奇数,所以,此序列不可能为图的次的序列.

(2) 序列中奇点为 5, 3, 1, 个数为 3 个, 因而, 不可能为图的次的序列.

(3) 对于 7 顶点的图, 由题意, 依次假设为

$$d(v_1) = 6, \quad d(v_2) = 5, \quad d(v_3) = 5$$

$$d(v_4) = 4, \quad d(v_5) = 3, \quad d(v_6) = 2, \quad d(v_7) = 1$$

并假定 G 为简单图, 则 v_1 存在与其他 6 个点的联线(包括与 v_7) v_2 与 v_1 间存在边 e_{12} , 而 v_7 的次为 1, 所以必不与 v_7 外的其他点相连, 因而, v_2 与除 v_1, v_7 外的 4 点间各有一连线.

假设 $G(V, E)$ 为简单图, 则余下的 v_3, v_4, v_5, v_6 中任一点与 v_1, v_2 都存在连线, 与 v_7 之间不存在边. 而由 $d(v_3) = 5$, 则 v_3 必与除 v_7 外的每一点都有连线.

由上推论, v_4, v_5, v_6 都同时与 v_1, v_2, v_3 相连, 即 v_4, v_5, v_6 的次至少是 3, 这与 $d(v_6) = 2$ 相矛盾.

故假设不成立, 该图中可能有环或多重边非简单图的次的序列.

11.2 已知九个人 $v_1, v_2, \dots, v_9$ 中 v_1 和两人握过手, v_2, v_3 各和四个人握过手, v_4, v_5, v_6, v_7 各和五个人握过手, v_8, v_9 各和六个人握过手, 证明这九个人中一定可以找出三人互相握过手.

【解】 设 9 个人为 9 个点, 则该问题可表述为 9 个点的简单图问题, 不存在重复边及环, 则根据题意知

$$d(v_1) = 2, \quad d(v_2) = d(v_3) = 4$$

$$d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = d(v_7) = 5, \quad d(v_8) = d(v_9) = 6$$

由 $d(v_9) = 6$, 则 v_4, v_5, v_6, v_7 中至少有两点存在与 v_9 的连线.

设该点为 v_4 与 v_5 , 假设 v_4 和 v_8 相联的其他 5 点之间无边, 则 $d(v_4) \leq 8 - 5 = 3$, 与已知 $d(v_4) = 5$ 相矛盾.

故假设不成立, 即 v_4 与上述 5 点间必存在至少两条边, 设其中一点为 v_k , 则 v_k, v_4, v_8 两两相连, 即存在 3 人互相握过手, 如图 11-1.

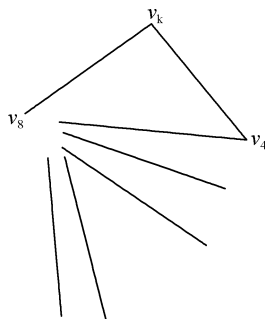


图 11-1

11.3 用破圈法和避圈法找出图 11-2 的一个支撑树.

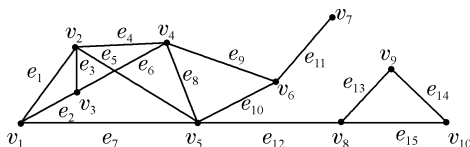


图 11-2

【解】 (1) 破圈法

根据破圈法的基本原理, 去掉(在边上用“/”表示)

- ① 取圈 (v_1, v_2, v_3) , 去掉边 e_2 .
- ② 取圈 (v_1, v_2, v_5) , 去掉边 e_7 .
- ③ 取圈 (v_2, v_3, v_4) , 去掉边 e_3 .
- ④ 取圈 (v_2, v_4, v_5) , 去掉边 e_5 .

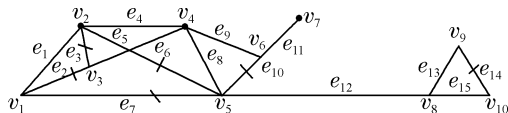


图 11-3

- ⑤ 取圈 (v_4, v_5, v_6) , 去掉边 e_{10} .
- ⑥ 取圈 (v_8, v_9, v_{10}) , 去掉边 e_{14} .

得到一个支撑树如图 11-4 所示.

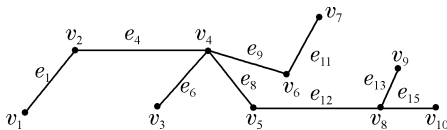


图 11-4

(2) 避圈法

- ① 任取一条边 e_1 , 找一条与 e_1 不构成圈的边 e_4 .
- ② 找一条与 $\{e_1, e_4\}$ 不构成圈的边 e_6 .
- ③ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6\}$ 不构成圈的边 e_8 .
- ④ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6, e_8\}$ 不构成圈的边 e_9 .
- ⑤ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9\}$ 不构成圈的边 e_{11} .
- ⑥ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}\}$ 不构成圈的边 e_{12} .
- ⑦ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}\}$ 不构成圈的边 e_{15} .
- ⑧ 找一条与 $\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{15}\}$ 不构成圈的边 e_{14} .
- ⑨ 得到一个支撑树 $\{e_1, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{11}, e_{12}, e_{15}, e_{14}\}$

如图 11-5 所示.

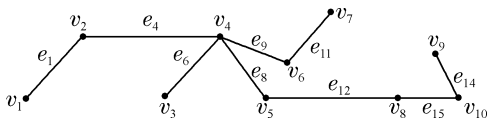


图 11-5

11.4 用破圈法和避圈法求图 11-6 中各图的最小树.

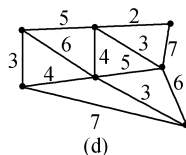
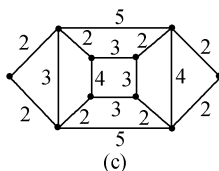
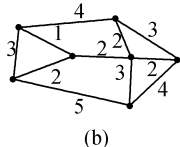
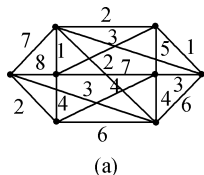


图 1-6

【解】 (a) 给图中的点和边分别加上名称,如图 11-7.

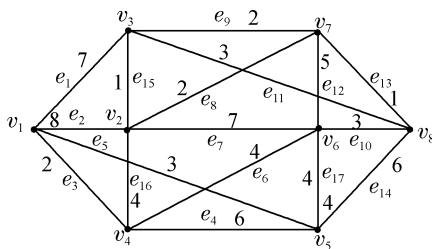


图 11-7

(I) 避圈法的方法为:开始选一条最小权的边,以后每步中,总从未被选取的边上选一条权最小的边,并使之与已选取的边不构成圈(每一步中,如果有两条或两条以上的边都是权最小的边,则从中任选一条).

按照此方法,算法步骤如下,①表示第 i 次的选取.

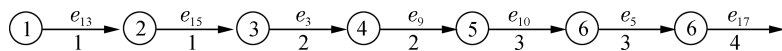


图 11-8

则以 $\{e_{13}, e_{15}, e_3, e_9, e_{10}, e_5, e_{17}\}$ 构成的图正好就是一个支撑树.

支撑树的权为:

$$1+1+2+2+3+3+4=16$$

对应的最小树如图 11-9 所示.

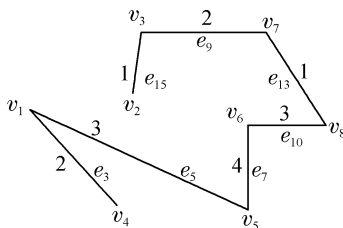


图 11-9

(II) 破圈法的基本方法为:任取一个圈,从圈中去掉一条权最大的边.(如果两条或两条以上的边都是权最大的边,则去掉任意其中一条),在余下的图中,重复这个步骤,一直得到一个不含圈的图为止,这时的图便是最小树.

按照上述方法,去边的具体过程如图 11-10 所示.

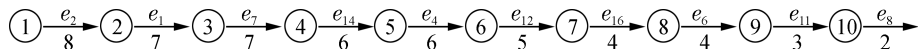


图 11-10

其中①表示第 i 次进行删除的边.

得到最小树如图 11-11 所示.

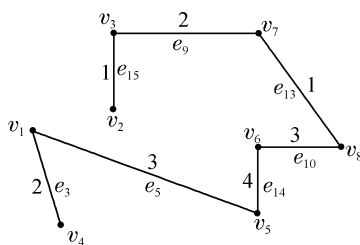


图 11-11

(b) 给(b)中的点和边加上名称分别为 v_i, e_i , 如图 11-12 所示.

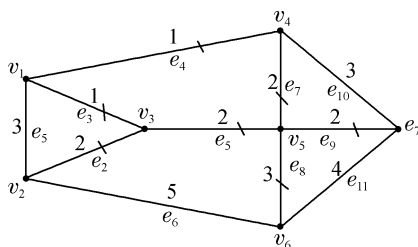


图 11-12

(I) 避圈法: 依次找不构成圈的最小边, 寻找过程如图 11-13 所示.



图 11-13

则由 $\{e_3, e_4, e_5, e_9, e_8, e_2\}$ 构成最小支撑树, 如图 11-14 所示.

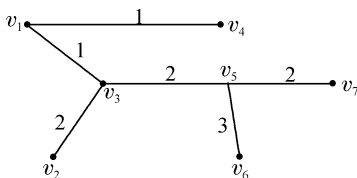


图 11-14

树的权重为:

$$1+1+2+2+3+2=11$$

(II) 破圈法: 本质为依次从所构成的圈中去除最大边, 去除过程如图 11-15 所示.

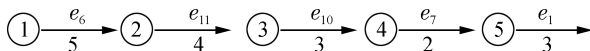


图 11-15

最后剩下的边 $\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_8, e_9\}$ 所构成的图为最小支撑树图

总权重为:

$$1+1+2+2+3+2=11$$

(c) 给(c)中的点和边加上名称分别为 v_i, e_i , 如图 11-16 所示.

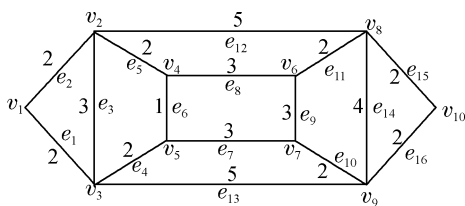


图 11-16

(I) 避圈法, 寻找最小边的过程如图 11-17 所示.

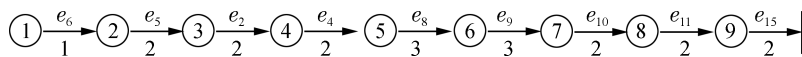


图 11-17

则由 $\{e_6, e_5, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{15}\}$ 构成最小支撑树.

如图 11-18 所示.

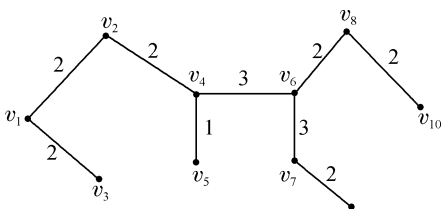


图 11-18

总权重为:

$$1+2+2+2+3+3+2+2+2=19$$

(II) 破圈法, 去除边的过程如图 11-19 所示.

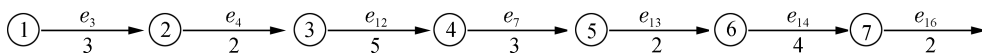


图 11-19

最后剩下 $\{e_1, e_2, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{15}\}$ 构成最小支撑树.

如图 11-20 所示.

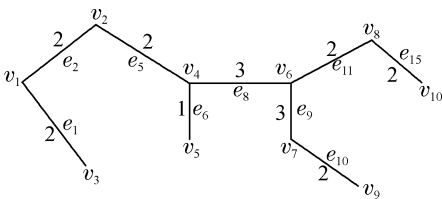


图 11-20

总权重为:

$$2+2+2+3+1+2+3+2+2=19$$

(d) 给(d)中的点和边上名称分别为 v_i, e_i , 如图 11-21 所示.

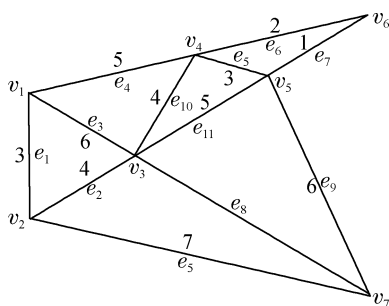


图 11-21

(I) 避圈法:

寻找最小边的过程如图 11-22 所示.

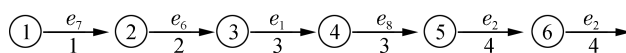


图 11-22

最后找出 $\{e_7, e_6, e_1, e_8, e_2, e_{10}\}$ 构成最小支撑树.

如图 11-23 所示:

总权重为:

$$w(T) = 3 + 4 + 4 + 2 + 1 + 3 = 17$$

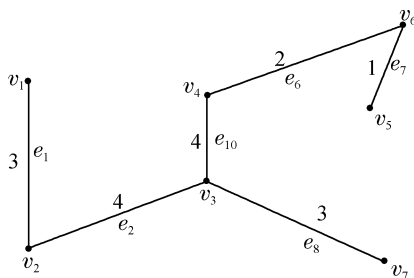


图 11-23

(II) 破圈法, 去除图中最大边的过程如图 11-24 所示.

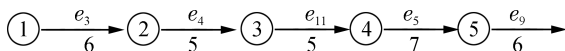


图 11-24

最后剩下的 $\{e_1, e_2, e_{10}, e_6, e_7, e_8\}$ 所构成最小支撑树如图 11-25 所示.

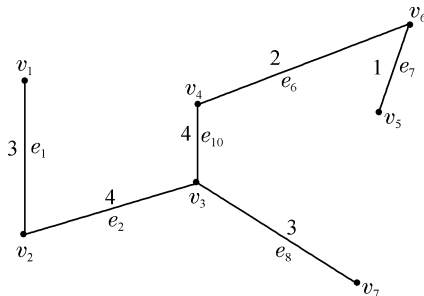


图 11-25

总权重为:

$$w(T) = 3 + 4 + 4 + 2 + 1 + 3 = 17$$

11.5 已知世界六大城市:

(Pe), (N), (Pa), (L), (T), (M) 试在由下表所示交通网络的数据中确定最小树.

	Pe	T	Pa	M	N	L
Pe	×	13	51	77	68	50
T	13	×	60	70	67	59
Pa	51	60	×	57	36	2
M	77	70	57	×	20	55
N	68	67	36	20	×	34
L	50	59	2	55	34	×

【解】 把题设中的表用图表示如下:

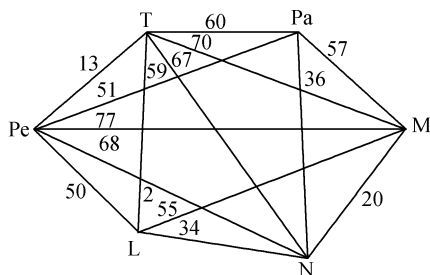


图 11-26

采用避圈法, 寻找最小边的过程如图 11-27 所示.

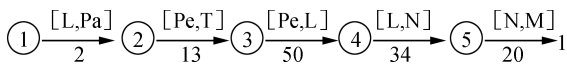


图 11-27

最后找到 $\{[L, p_a], [P_l, T], [P_l, L], [L, N], [N, M]\}$

构成最小支撑树如图 11-28 所示.

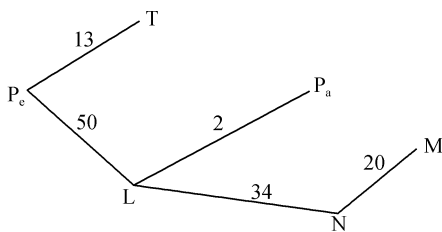


图 11-28

总权重为:

$$w(T) = 2 + 13 + 50 + 34 + 20 = 119$$

11.6 有九个城市, $v_1, v_2, \dots, v_9$, 其公路网如图 11-29 所示. 弧旁数字是该段公路的长度, 有一批货物从 v_1 运到 v_9 , 问走那条路最短.

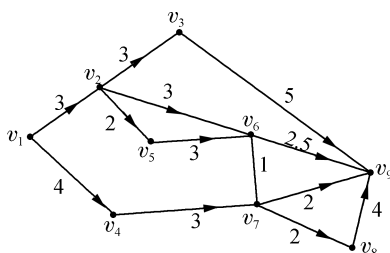


图 11-29

【解】 最短路线问题的一般提法是:欲寻找网络中从起点 v_1 到终点 v_n 的最短路线,即寻求连接这两点的边的总长度为最小的通路,最短路线中的网络大都是有向网络,也可以是无向网络.

以 l_{ij} 表示 v_i 到 v_j 的弧上的距离权,则可以写出网络的距离矩阵 $L=(l_{ij})$,其中若 v_i 到 v_j 没有弧,则 $l_{ij}=\infty$,若网络为无向网络,则 L 成为一个对称矩阵.

则最短路可以这样描述:要找出从 v_1 到 v_n 的通路 μ ,使全长为最短,即

$$\min L(\mu) = \sum_{e_{ij} \in \mu} l_{ij}$$

其中 $L(\mu)$ 为沿着通路 μ 从 v_1 到 v_n 的距离, l_{ij} 为 v_i 到 v_j 的弧的长度.

由题设:

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & 2.5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

	v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
初始值	$T(\quad)$	$\{0\}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$	$0+3$	$0+\infty$	$0+4$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\quad)$	$\{3\}$	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第二次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$		$3+3$	$3+\infty$	$3+2$	$3+3$	$3+\infty$	$3+\infty$	$3+\infty$	$3+\infty$
	$T(\quad)$		6	$\{4\}$	5	6	∞	∞	∞	∞
第三次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$		$4+\infty$		$4+\infty$	$4+\infty$	$4+3$	$4+\infty$	$4+\infty$	$4+\infty$
	$T(\quad)$		6		$\{5\}$	6	7	∞	∞	∞

第四次 迭代	$P(\quad)+l_{ij}$	$5+\infty$	$5+3$	$5+\infty$	$5+\infty$	$5+\infty$
	$T(\quad)$	$\{6\}$	6	7	∞	∞

续表

第五次迭代	$P(\quad) + l_{ij}$	$6 + \infty$	$6 + \infty$	$6 + \infty$	$6 + 5$
	$T(\quad)$	$\{6\}$	7	∞	11
第六次迭代	$P(\quad) + l_{ij}$		$6 + 1$	$6 + \infty$	$6 + 2.5$
	$T(\quad)$		$\{7\}$	∞	8.5
第七次迭代	$P(\quad) + l_{ij}$			$7 + 2$	$7 + 2$
	$T(\quad)$			9	$\{8.5\}$

其中表中第 1 行是初始值 $T(v_j)$, $\{\quad\}$ 表示 $P(v_i)$.

以后的 $P(\quad) + l_{ij}$ 行是由上一行中 $\{\quad\}$ 中的 $P(v_i)$ 与 l_{ij} 的和, $T(\quad)$ 行是由上两行中对应列的元素中取最小的一个, 相当于:

$$T(v_j) = \min \{ T(v_j), P(v_i) + l_{ij} \}$$

每次迭代在 $T(v_j)$ 行选最小的, 用 $\{\quad\}$ 表示 $P(v_k)$, 以后对应的列不再进行计算, 相当于从 $\bar{S}$ 中去掉.

根据上面的迭代, 得

v_1 到 v_9 的最短路为 (v_1, v_2, v_6, v_9)

其分解为

$$8.5 = 6 + 2.5 = 3 + 3 + 2.5 = (v_1, v_2) + (v_2, v_6) + (v_6, v_9)$$

总权值为 8.5

11.7 用 Dijkstra 方法求图 11-30 中从 v_1 到各点的最短路.

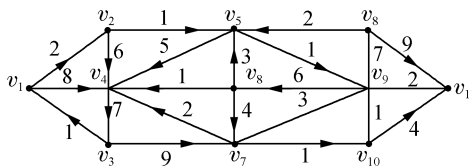


图 11-30

【解】 用 Dijkstra 方法的计算步骤如下:

距离矩阵 $L = (l_{ij})$ 为

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

	V_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
初始值	$T(\quad)$	$\{0\}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$		$0+2$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\quad)$		$\{2\}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第二次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$			$2+\infty$	$2+6$	$2+1$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$	$2+\infty$
	$T(\quad)$			∞	8	$\{3\}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
第三次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$			$3+\infty$	$3+5$		$3+\infty$	$3+\infty$	$3+\infty$	$3+1$	$3+\infty$	$3+\infty$
	$T(\quad)$			∞	8		∞	∞	∞	$\{4\}$	∞	∞
第四次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$			$4+\infty$	$4+\infty$		$4+6$	$4+\infty$	$4+7$		$4+\infty$	$4+\infty$
	$T(\quad)$			∞	8		$\{10\}$	∞	11		∞	∞
第五次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$			$10+\infty$	$10+4$			$10+\infty$	$10+\infty$		$10+\infty$	$10+\infty$
	$T(\quad)$			∞	$\{8\}$			∞	11		∞	∞
第六次迭代	$P(\quad)+_{ij}$			$8+7$				$8+\infty$	$8+\infty$		$8+\infty$	$8+\infty$
	$T(\quad)$			$\{15\}$				10	11		∞	∞
第七次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$							$15+9$	$15+\infty$		$15+\infty$	$15+\infty$
	$T(\quad)$							$\{14\}$	11		∞	∞
第八次迭代	$P(\quad)+_{ij}$								$14+\infty$		$14+1$	$10+\infty$
	$T(\quad)$								$\{11\}$		15	∞
第九次迭代	$P(\quad)+_{ij}$										$11+\infty$	$11+9$
	$T(\quad)$										$\{15\}$	20
第十次迭代	$P(\quad)+_{ij}$											$15+4$
	$T(\quad)$											$\{19\}$

由上表的迭代过程可得:

$$\begin{aligned}
 s_q &= \{v_1, v_2, v_5, v_9, v_4, v_6, v_8, v_7, v_3, v_{10}, v_{11}\} \\
 d(v_1, v_2) &= 2, \text{最短路: } (v_1, v_2); \\
 d(v_1, v_5) &= 3, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5); \\
 d(v_1, v_9) &= 4, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9); \\
 d(v_1, v_7) &= 14, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9, v_6, v_7); \\
 d(v_1, v_8) &= 11, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9, v_8); \\
 d(v_1, v_4) &= 8, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_4) \text{ 或 } (v_1, v_4); \\
 d(v_1, v_6) &= 10, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9, v_6); \\
 d(v_1, v_3) &= 15, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_4, v_3) \text{ 或 } (v_1, v_4, v_3); \\
 d(v_1, v_{10}) &= 15, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9, v_6, v_7, v_{10}); \\
 d(v_1, v_{11}) &= 19, \text{最短路: } (v_1, v_2, v_5, v_9, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}).
 \end{aligned}$$

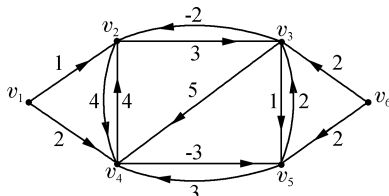
11.8 求图 11-31 中从 v_1 到各点的最短路.

图 11-31

【解】 当赋权有向图 D 中, 存在具有负权的弧时, 求最短路的方法如下:

不妨设从任一点 v_i 到任一点 v_j 都有一条弧. (如果在 D 中, $(v_i, v_j) \notin A$, 则添加弧 (v_i, v_j) , 令 $w_{ij} = +\infty$)

显然, 从 v_s 到 v_j 的最短路总是从 v_s 出发, 沿着一条路到某个点 v_i , 再沿 (v_i, v_j) 到 j 的 (这里 v_i 可以是 v_s 本身), 从 v_s 到 v_i 的这条路必定是从 v_s 到 v_j 的最短路, 所以 $d(v_s, v_j)$ 必满足如下方程.

$$d(v_s, v_j) = \min_i \{ d(v_s, v_i) + w_{ij} \}$$

为了求得这个方程的解, $d(v_s, v_1), d(v_s, v_2), \dots, d(v_s, v_p)$ (这里 $p=p(0)$), 可用如下递推公式:

开始时, 令

$$d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

对 $t=2, 3, \dots$

$$d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \} \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

若进行到某一步, 例如第 k 步时, 对所求 $j=1, 2, \dots, p$, 有

$$d^{(k)}(v_s, v_j) = d^{(k-1)}(v_s, v_j)$$

则 $\{ d^{(k)}(v_s, v_j) \mid j=1, 2, \dots, p \}$ 即为 v_s 到各点的最短路的权.

	w_{ij}						$d^{(t)}(v_i, v_j)$			
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
v_1	0	1	1	2	∞	∞	0	0	0	0
v_2	∞	0	3	4	∞	∞	1	1	1	1
v_3	0	-2	0	5	2	∞	∞	4	1	1
v_4	∞	4	∞	0	-3	∞	2	2	2	2
v_5	∞	∞	2	3	0	∞	∞	-1	-1	-1
v_6	∞	∞	2	∞	2	0	∞			

根据下面计算把计算结果填入上表.

当 $t=1$

$$d^{(1)}(w_1, v_1) = w_{11} = 0, \quad d^{(1)}(v_1, v_2) = w_{12} = 1$$

$$d^{(1)}(v_1, v_3) = w_{13} = +\infty, \quad d^{(1)}(v_1, v_4) = w_{14} = 2$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) = w_{15} = +\infty, \quad d^{(1)}(v_1, v_6) = w_{16} = +\infty$$

当 $t=2$

$$d^{(2)}(v_1, v_1) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{11}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{21}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{31}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{41}, \\ d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{51}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{61} \}$$

$$= \min \{ 0+0, 1+\infty, \infty+\infty, 2+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ 0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty \}$$

$$= 0$$

$$d^{(2)}(v_1, v_2) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{12}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{22}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{32}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{42},$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{52}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{62} \}$$

$$= \min \{ 0+1, 1+0, \infty-2, 2+4, \infty+\infty, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ 1, 1, \infty, 6, \infty, \infty \}$$

$$= 1$$

$$d^{(2)}(v_1, v_3) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{13}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{23}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{33}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{43},$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{53}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{63} \}$$

$$= \min \{ 0+\infty, 1+3, \infty+0, 2+\infty, \infty+2, \infty+2 \}$$

$$= \min \{ \infty, 4, \infty, \infty, \infty, \infty \}$$

$$= 4$$

$$d^{(2)}(v_1, v_4) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{14}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{24}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{34}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{44},$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{54}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{64} \}$$

$$= \min \{ 0+2, 1+4, \infty+5, 2+0, \infty+3, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ 2, 5, \infty, 2, \infty, \infty \}$$

$$= 2$$

$$d^{(2)}(v_1, v_5) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{15}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{25}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{35}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{45},$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{55}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{65} \}$$

$$= \min \{ 0+\infty, 1+\infty, \infty+1, 2-3, \infty+0, \infty+2 \}$$

$$= \min \{ \infty, \infty, \infty, -1, \infty, \infty \}$$

$$= -1$$

$$d^{(2)}(v_1, v_6) = \min \{ d^{(1)}(v_1, v_1) + w_{16}, d^{(1)}(v_1, v_2) + w_{26}, d^{(1)}(v_1, v_3) + w_{36}, d^{(1)}(v_1, v_4) + w_{46},$$

$$d^{(1)}(v_1, v_5) + w_{56}, d^{(1)}(v_1, v_6) + w_{66} \}$$

$$= \min \{ 0+\infty, 1+\infty, \infty+\infty, 2+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty \}$$

$$= \infty$$

当 $t=3$

$$d^{(3)}(v_1, v_1) = \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{11}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{21}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{31}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{41},$$

$$d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{51}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{61} \}$$

$$= \min \{ 0+0, 1+\infty, 4+\infty, 2+\infty, -1+\infty, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ 0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty \}$$

$$= 0$$

$$d^{(3)}(v_1, v_2) = \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{12}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{22}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{32}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{42},$$

$$d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{52}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{62} \}$$

$$= \min \{ 0+1, 1+\infty, 4-2, 2+4, -1+\infty, \infty+\infty \}$$

$$= \min \{ 1, \infty, 2, 6, \infty, \infty \}$$

$$= 1$$

$$d^{(3)}(v_1, v_3) = \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{13}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{23}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{33}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{43},$$

$$d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{53}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{63} \}$$

$$= \min \{ 0+\infty, 1+3, 4+0, 2+\infty, -1+2, \infty+2 \}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \{ \infty, 4, 4, \infty, 1, \infty \} \\
&= 1 \\
d^{(3)}(v_1, v_4) &= \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{14}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{24}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{34}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{44}, \\
&\quad d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{54}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{64} \} \\
&= \min \{ 0+2, 1+4, 4+5, 2+0, -1+3, \infty + \infty \} \\
&= \min \{ 2, 5, 9, 2, 2, \infty \} \\
&= 2 \\
d^{(3)}(v_1, v_5) &= \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{15}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{25}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{35}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{45}, \\
&\quad d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{55}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{65} \} \\
&= \min \{ 0+\infty, 1+\infty, 4+1, 2-3, -1+0, \infty + 2 \} \\
&= \min \{ \infty, \infty, 5, -1, -1, \infty \} \\
&= -1 \\
d^{(3)}(v_1, v_6) &= \min \{ d^{(2)}(v_1, v_1) + w_{16}, d^{(2)}(v_1, v_2) + w_{26}, d^{(2)}(v_1, v_3) + w_{36}, d^{(2)}(v_1, v_4) + w_{46}, \\
&\quad d^{(2)}(v_1, v_5) + w_{56}, d^{(2)}(v_1, v_6) + w_{66} \} \\
&= \min \{ 0+\infty, 1+\infty, 4+\infty, 2+\infty, -1+\infty, \infty + \infty \} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

当 $t=4$

$$\begin{aligned}
d^{(2)}(v_1, v_1) &= d^{(3)}(v_1, v_1) = 0 \\
d^{(2)}(v_1, v_2) &= d^{(3)}(v_1, v_2) = 1 \\
d^{(2)}(v_1, v_5) &= d^{(3)}(v_1, v_5) = -1, \\
d^{(2)}(v_1, v_6) &= d^{(3)}(v_1, v_6) = +\infty
\end{aligned}$$

即 v_1 到 v_1 的距离为 0, v_1 到 v_2 的距离为 1, v_1 到 v_5 的距离为 -1, v_1 到 v_6 的距离为 $+\infty$, 只要继续计算 $d^{(4)}(v_1, v_3), d^{(4)}(v_1, v_4)$

$$\begin{aligned}
d^{(4)}(v_1, v_3) &= \min \{ d^{(3)}(v_1, v_1) + w_{13}, d^{(3)}(v_1, v_2) + w_{23}, d^{(3)}(v_1, v_3) + w_{33}, d^{(3)}(v_1, v_4) + w_{43}, \\
&\quad d^{(3)}(v_1, v_5) + w_{53}, d^{(3)}(v_1, v_6) + w_{63} \} \\
&= \min \{ 0+\infty, 1+3, 1+0, -1+\infty, -1+2, \infty + 2 \} \\
&= \min \{ \infty, 4, 1, \infty, 1, \infty \} \\
&= 1 \\
d^{(4)}(v_1, v_4) &= \min \{ d^{(3)}(v_1, v_1) + w_{14}, d^{(3)}(v_1, v_2) + w_{24}, d^{(3)}(v_1, v_3) + w_{34}, d^{(3)}(v_1, v_4) + w_{44}, \\
&\quad d^{(3)}(v_1, v_5) + w_{54}, d^{(3)}(v_1, v_6) + w_{64} \} \\
&= \min \{ 0+2, 1+4, 1+5, 2+0, -1+3, \infty + \infty \} \\
&= \min \{ 2, 5, 6, 2, 2, \infty \} \\
&= 2
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
d^{(3)}(v_1, v_3) &= d^{(4)}(v_1, v_3) = 1 \\
d^{(3)}(v_1, v_4) &= d^{(4)}(v_1, v_4) = 2
\end{aligned}$$

故 v_1 到 v_3 的距离为 1, v_1 到 v_4 的距离为 2. 综上所述:

$$d(v_1, v_2) = 1, \quad d(v_1, v_3) = 1, \quad d(v_1, v_4) = 2, \quad d(v_1, v_5) = -1, \quad d(v_1, v_6) = +\infty$$

11.9 在图 11-32 中, (1) 用 Dijkstra 方法求从 v_1 到各点的最短路; (2) 指出对 v_1 来说那些顶点是不可到达的.

【解】(1) 首先设

$$P(v_1) = 0, \quad T(v_j) = +\infty \quad (j=2, 3, \dots, 8)$$

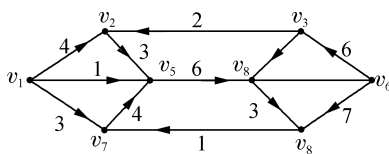


图 11-32

第 1 步

v_1 已经 P 标号, $(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_7) \in A$

$$T'(v_2) = P(v_1) + w_{12} = 0 + 4 = 4$$

由 $T'(v_2) < T(v_2)$

则 $T(v_2) = 4$

$$T'(v_5) = P(v_1) + w_{15} = 0 + 1 = 1$$

由 $T'(5) = T(v_5)$

则 $T(v_5) = 1$

$$T'(v_7) = P(v_1) + w_{17} = 0 + 3 = 3$$

由 $T'(v_7) < T(v_7)$

则 $T(v_7) = 3$

则 $\min\{T(v_2), T(v_5), T(v_7)\} = \min\{4, 1, 3\} = 1$

于是, 有 $P(v_5) = 1$

第 2 步, v_5 已标号, 由 $(v_5, v_6) \in A$

$$T'(v_6) = P(v_5) + w_{56} = 1 + 6 = 7$$

因 $T'(v_6) < T(v_6)$

则 $T(v_6) = 7$

$$\min\{T(v_2), T(v_7), T(v_6)\} = 3$$

故 $P(v_7) = 3$

第 3 步, 对于已 P 标号的 v_7

$$\min\{T(v_2), T(v_6)\} = 4$$

故 $P(v_2) = 4$

第 4 步, 对于已 P 标号的 v_2 , 则

$$P(v_6) = 7$$

第 5 步, 已 P 标号的 v_6 , $(v_6, v_8) \in A$

$$T'(v_8) = P(v_6) + w_{68} = 7 + 3 = 10$$

由于 $T'(v_8) < T(v_8)$

故 $T(v_8) = 10$, $\min\{T(v_8)\} = 10$

故 $P(v_8) = 10$

第 6 步, 已 P 标号 v_8 , $(v_8, v_j) \notin A, j \in$ 其他剩余点, 故

$$d(v_1, v_2) = 4, \quad d(v_1, v_7) = 3, \quad d(v_1, v_5) = 1,$$

$$d(v_1, v_6) = 7, \quad d(v_1, v_8) = 10.$$

(2) v_1 不能到达 v_3 和 v_4 .

11.10 求图 11-33 中从任意一点到另外任意一点的最短路.

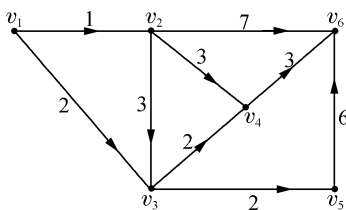


图 11-33

【解】 (1) 从 v_1 始发求最短路.

v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
初始值	$T(\quad)$	$\{0\}$	∞	∞	∞	∞
第一次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$		$0+1$	$0+2$	$0+\infty$	$0+\infty$
	$T(\quad)$		$\{1\}$	2	∞	∞
第二次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$			$1+3$	$1+3$	$1+\infty$
	$T(\quad)$			$\{2\}$	4	∞
第三次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$				$2+2$	$2+\infty$
	$T(\quad)$				$\{4\}$	8
第四次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$					$4+\infty$
	$T(\quad)$					$\{4\}$
第五次迭代	$P(\quad)+l_{ij}$					
	$T(\quad)$					$\{7\}$

由上计算过程可知

$d(v_1, v_2) = 1$, 最短路为 (v_1, v_2) .

$d(v_1, v_3) = 2$, 最短路为 (v_1, v_3) .

$d(v_1, v_4) = 4$, 最短路为 (v_1, v_3, v_4) 或 (v_1, v_2, v_4) .

$d(v_1, v_5) = 4$, 最短路为 (v_1, v_3, v_5) .

$d(v_1, v_6) = 7$, 最短路为 (v_1, v_2, v_4, v_6) .

(2) v_2 为出发点,

$d(v_2, v_3) = 3$, 最短路为 (v_2, v_3) .

$d(v_2, v_4) = 3$, 最短路为 (v_2, v_4) .

$d(v_2, v_5) = 5$, 最短路为 (v_2, v_3, v_5) .

$d(v_2, v_6) = 6$, 最短路为 (v_2, v_4, v_6) .

v_1 为不可到达点.

(3) 以 v_3 为始发点,

$d(v_3, v_4) = 2$, 最短路为 (v_3, v_4) .

$d(v_3, v_5) = 2$, 最短路为 (v_3, v_5) .

$d(v_3, v_6) = 5$, 最短路为 (v_3, v_4, v_6) .

v_1, v_2 均为不可到达点.

(4) 以 v_4 为始发点, 只有一条路 $d(v_4, v_6)$, 且 $d(v_4, v_6) = 3$.

其余均为不可到达点.

(5) 以 v_5 为始发点, 只有路 (v_5, v_6) , 且 $d(v_5, v_6) = 6$.

(6) 以 v_6 为始发点, 则无路.

11.11 在如图 11-34 所示的网络中, 每弧旁的数字是 (c_{ij}, f_{ij}) .

(1) 确定所有的截集;

(2) 求最小截集的容量;

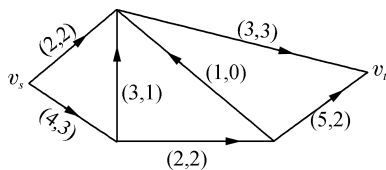


图 11-34

(3) 证明指出的流是最大流.

【解】 把题设中的中间点标号如图 11-35 所示.

(1) 首先确定所有的截集与对应的容量.

① 若 $v_1 = \{v_s\}$, 则其截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_1), (v_s, v_2)\}$$

其容量为

$$c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s1} + c_{s2} = 4 + 2 = 6$$

② 若 $v_1 = \{v_s, v_1\}$, 则其截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$$

其容量为

$$c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s2} + c_{12} + c_{13} = 2 + 3 + 2 = 7$$

③ 若 $v_1 = \{v_s, v_1, v_2\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_1, v_3), (v_2, v_t)\}$$

其容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{2t} + c_{3t} = 2 + 3 = 5$

④ 若 $v_1 = \{v_s, v_1, v_2, v_3\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_2, v_t), (v_3, v_t)\}$$

其容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{2t} + c_{3t} = 3 + 5 = 8$

⑤ 若 $v_1 = \{v_s, v_2\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_1), (v_2, v_t)\}$$

容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s1} + c_{2t} = 4 + 3 = 7$

⑥ 若 $v_1 = \{v_s, v_2, v_3\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_1), (v_3, v_t), (v_2, v_t)\}$$

容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s1} + c_{3t} + c_{2t} = 4 + 3 + 5 = 12$

⑦ 若 $v_1 = \{v_s, v_3\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_1), (v_s, v_2), (v_3, v_t), (v_3, v_2)\}$$

容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s1} + c_{s2} + c_{3t} + c_{32} = 4 + 2 + 5 + 1 = 12$

⑧ 若 $v_1 = \{v_s, v_1, v_3\}$, 截集为

$$(v_1, \bar{v}_1) = \{(v_s, v_2), (v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_3, v_t)\}$$

容量为 $c(v_1, \bar{v}_1) = c_{s2} + c_{12} + c_{32} + c_{3t} = 2 + 3 + 1 + 5 = 11$

(2) 由(1)所求, 最小截集的容量为

$$c(v_1^*, \bar{v}_1^*) = \min \{c(v_1, \bar{v}_1)\} = 5, \text{ 其中 } v_1^* = \{v_s, v_1, v_2\}, \bar{v}_1^* = \{v_3, v_t\}.$$

(3) 根据最大流量最小截量定理, 流大流量为

$$v(f^*) = c(v_1^*, \bar{v}_1^*) = 5$$

11.12 求如图 11-36 所示的网络的最大流. (每弧旁的数字是 (c_{ij}, f_{ij})).

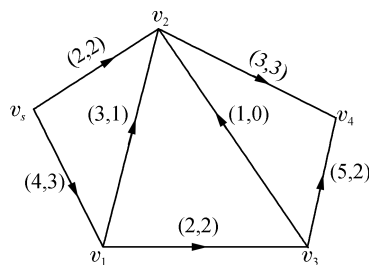


图 11-35

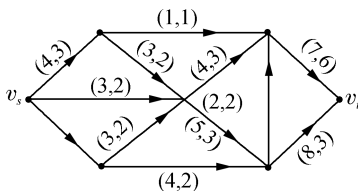


图 11-36

【解】 给中间点标上编号如下:

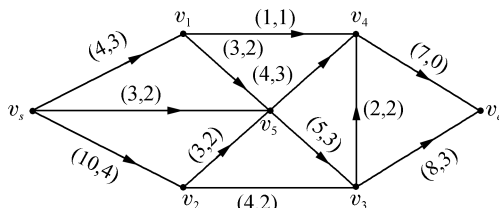


图 11-37

(1) 标号过程.

开始先给 v_s 标上 $(0, +\infty)$, 这时, v_s 是标号而未检查的点.

第 1 步: 弧 (v_s, v_1) , 因 $f_{s1} = 3, c_{s1} = 4$, 则 $f_{s1} < c_{s1}$.

则给 v_1 标号 $(v_s, L(v_1))$, $L(v_1) = \min\{L(v_s), c_{s1} - f_{s1}\} = \min\{+\infty, 4 - 3\} = 1$

第 2 步: 检查弧 (v_1, v_4) .

$$f_{14} = 1, \quad c_{14} = 1$$

不满足标号条件, 对 v_4 不进行标号.

对于弧 (v_1, v_5) , $f_{15} = 2, c_{15} = 3$, 则 $f_{15} < c_{15}$.

给 v_5 标号 $(v_1, L(v_5))$, $L(v_5) = \min\{L(v_1), c_{15} - f_{15}\} = \min\{1, 1\} = 1$

第 3 步: 弧 (v_5, v_4) , $f_{54} = 3, c_{54} = 5$, 则 $f_{54} < c_{54}$.

则给 v_4 标号 $(v_5, L(v_4))$, $L(v_4) = \min\{L(v_5), c_{54} - f_{54}\} = \min\{1, 5 - 3\} = 1$

第 4 步: 对于弧 (v_4, v_e) , 因 $f_{4e} = 0, c_{4e} = 7, f_{4e} < c_{4e}$.

则给 v_e 标号 $(v_4, L(v_e))$, $L(v_e) = \min\{L(v_4), c_{4e} - f_{4e}\} = \min\{1, 7 - 0\} = 1$

故 $\theta = L(v_e) = 1$

(2) 调整过程

由点的第一个标号找到一条增广链. 如图 11-38 中的“/”所示:

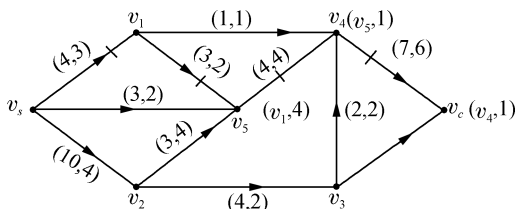


图 11-38

按 $\theta = 1$ 在 M 上进行调整.

$$f_{s1} + 1 = 4, \quad f_{15} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$f_{54} + 1 = 4, \quad f_{4e} + 1 = 7$$

其余 f_{ij} 不变, 调整后如图 11-39 所示

再对这个可行流进行标号过程, 寻找增广链.

(1) 标号过程.

开始先给 v_s 标上 $(0, +\infty)$,

第 1 步: 对于 (v_s, v_2) , $f_{s2} = 2, c_{s2} = 10, f_{s2} < c_{s2}$, 则给 v_2 标号 $(v_s, L(v_2))$,

$$L(v_2) = \min\{L(v_s), c_{s2} - f_{s2}\} = \min\{+\infty, 10 - 2\} = 8$$

第 2 步: 对于弧 (v_2, v_3) , $f_{23} = 4, c_{23} = 4$, 则 $f_{23} < c_{23}$.

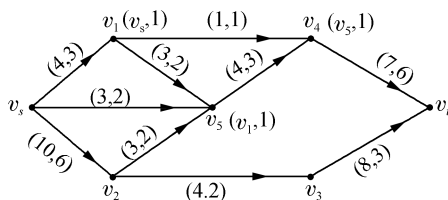


图 11-39

给 v_2 标号 $(v_s, L(v_s))$.

$$L(v_2) = \min \{ L(v_s), c_{s2} - f_{s2} \} = \min \{ 6, 4 - 2 \} = 2$$

第 3 步: 对于弧 (v_3, v_t) , $f_{3t} = 3, c_{3t} = 8$, 则 $f_{3t} < c_{3t}$.

给 v_t 标号 $(v_3, L(v_t))$,

$$L(v_t) = \min \{ L(v_3), c_{3t} - f_{3t} \} = \min \{ 2, 8 - 3 \} = 2$$

故 v_t 有了标点, 转入调整过程.

(2) 调整过程.

由点的第一个标号找到一条增广链. 如图 11-40 中的“/”表示.

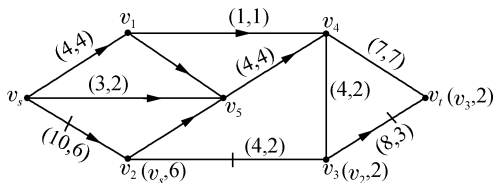


图 11-40

根据 $\theta = 2$, 在 M 上调整 f :

$$f_{s2} + 2 = 8, \quad f_{23} + 2 = 4, \quad f_{3t} + 2 = 5$$

其他 f_{ij} 不变, 调整后得到如图 11-41 所示的可行流. 对这个可行流进入标号过程, 寻找增广链.

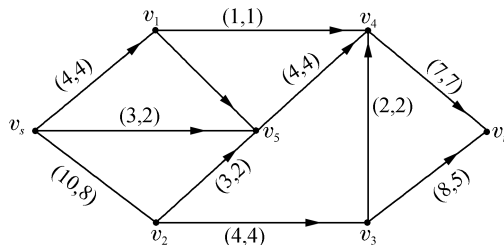


图 11-41

标号过程.

首先给 v_s 标号 $(0, +\infty)$.

第 1 步: 对于弧 (v_s, v_5) , $f_{s5} = 2, c_{s5} = 3$, 则 $f_{s5} < c_{s5}$, 故给 v_5 标号 $(v_s, L(v_s))$. 这里

$$L(v_5) = \min \{ L(v_s), c_{s5} - f_{s5} \} = \min \{ +\infty, 3 - 2 \} = 1$$

第 2 步: 对于弧 (v_5, v_4) , $f_{54} = 4, c_{54} = 4$. 则 v_4 不能标号.

第 3 步: 对于弧 (v_s, v_2) , $f_{s2} = 8, c_{s2} = 10$, 则 $f_{s2} < c_{s2}$, 给 v_2 标号 $(v_s, L(v_s))$, 这里

$$L(v_2) = \min \{ L(v_s), c_{s2} - f_{s2} \} = \min \{ +\infty, 10 - 8 \} = 2$$

第 4 步: 对于弧 (v_2, v_3) , $f_{23} = 4, c_{23} = 4$, 则 $f_{23} = c_{23}$. 故 v_3 不能标号.

此时,标号无法继续下去,算法结束.此时的可行流即为网络最大流,其最大流为

$$v(f^*) = f_{s1} + f_{s4} + f_{23} = 4 + 4 + 4 = 12$$

对应的最小截集为 (v_1^*, v_1^*) , 其中

$$v_1^* = \{v_s, v_2, v_5\}, v_1^* = \{v_1, v_3, v_4, v_t\}$$

11.13 求如图 11-42 所示的网络的最大流.

【解】 由题设,给图中的中间点加上名称如图 11-43 所示,令所有弧的可行流为 0.

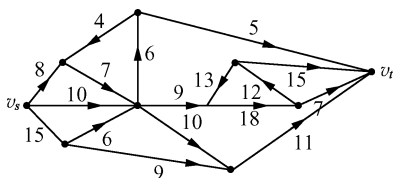


图 11-42

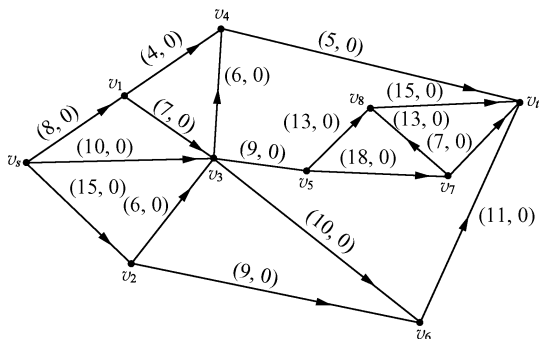


图 11-43

用标号法求所示的网络最大流,弧旁的数字为 (c_{ij}, f_{ij}) .

(1) 标号过程.

第 1 步:首先给 v_s 标号 $(0, +\infty)$,

第 2 步:检查 v_s ,对 (v_s, v_2) , $\because f_{s2} = 0, c_{s2} = 15$, 则 $f_{s2} < c_{s2}$, 给 v_2 标号为 $(v_s, L(v_2))$,
 $L(v_2) = \min \{L(v_s), c_{s2} - f_{s2}\} = \min \{+\infty, 15 - 0\} = 15$

第 3 步:检查 v_2 ,对 (v_2, v_6) , $f_{26} = 0, c_{26} = 9$. 则 $f_{26} < c_{26}$. 给 v_6 标号为 $(v_2, L(v_6))$,
 $L(v_6) = \min \{L(v_2), c_{26} - f_{26}\} = \min \{15, 9 - 0\} = 9$

第 4 步:检查 v_6 .对于 (v_6, v_t) , $f_{6t} = 0, c_{6t} = 11$, 则 $f_{6t} < c_{6t}$. 给 v_t 标号为 $(v_6, L(v_t))$,
 $L(v_t) = \min \{L(v_6), c_{6t} - f_{6t}\} = \min \{9, 11 - 0\} = 9$

因为 v_t 有了标号,转入调整过程.

(2) 调整过程.

由点的第一个标号找到一条增广链如图 11-44 中的“/”所示.

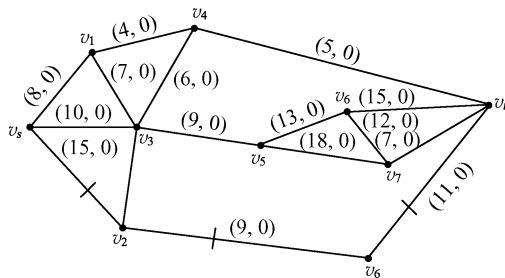


图 11-44

按照 $\theta = 9$ 进行调整.

$$f_{s2} + \theta = 0 + 9 = 9$$

$$f_{26} + \theta = 0 + 9 = 9$$

$$f_{6t} + \theta = 0 + 9 = 9$$

调整后得到如图 11-45 所示的可行流.对这个可行流进入标号过程寻找增广链.

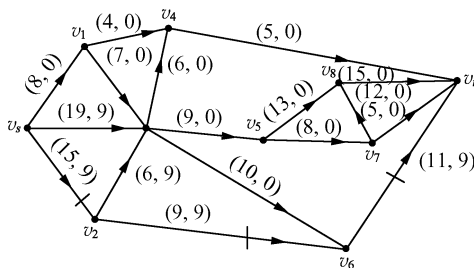


图 11-45

(3) 标号过程.

第 1 步: 给 v_s 标号为 $(0, +\infty)$.

第 2 步: 检查 v_s , 对 (v_s, v_3) , $f_{s3} = 0, c_{s3} = 10$, 则 $f_{s3} < c_{s3}$, 给 v_3 标号为 $(v_s, L(v_3))$,
 $L(v_3) = \min \{ L(v_s), c_{s3} - f_{s3} \} = \min \{ +\infty, 10 - 0 \} = 10$

第 3 步: 检查 v_3 , 对 (v_3, v_5) , $f_{35} = 0, c_{35} = 9$. 则 $f_{35} < c_{35}$, 给 v_5 标号为 $(v_3, L(v_5))$,
 $L(v_5) = \min \{ L(v_3), c_{35} - f_{35} \} = \min \{ 10, 9 - 0 \} = 9$

第 4 步: 检查 v_5 , 对弧 (v_5, v_7) , $f_{57} = 0, c_{57} = 18$, 则 $f_{57} < c_{57}$. 给 v_7 标号为 $(v_5, L(v_7))$,
 $L(v_7) = \min \{ L(v_5), c_{57} - f_{57} \} = \min \{ 9, 18 - 0 \} = 9$

第 5 步: 检查 v_7 , 对弧 (v_7, v_8) , $f_{78} = 0, c_{78} = 12$, 则 $f_{78} < c_{78}$. 给 v_8 标号为 $(v_7, L(v_8))$,
 $L(v_8) = \min \{ L(v_7), c_{78} - f_{78} \} = \min \{ 9, 12 - 0 \} = 9$

第 6 步: 检查 v_8 , 对弧 (v_8, v_t) , $f_{8t} = 0, c_{8t} = 15$, $f_{8t} < c_{8t}$. 则给 v_t 标号为 $(v_8, L(v_t))$,
 $L(v_t) = \min \{ L(v_8), c_{8t} - f_{8t} \} = \min \{ 9, 15 - 0 \} = 9$

则 v_t 有了标号, 故转入调整过程.

(4) 调整过程.

按点的第一个标号找到一条增广链. 如图 11-46 中的“/”表示

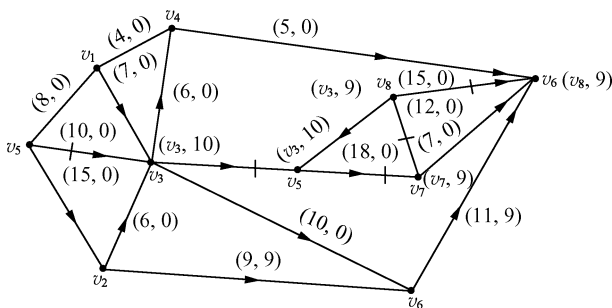


图 11-46

按照 $\theta = 9$, 作调整

$$f_{s3} + 9 = 0 + 9 = 9, \quad f_{35} + 9 = 0 + 9 = 9$$

$$f_{57} + 9 = 0 + 9 = 9, \quad f_{78} + 9 = 0 + 9 = 9$$

$$f_{8t} + 9 = 0 + 9 = 9$$

调整后得到如图 11-47 所示的可行流, 对这个可行流进入标号过程寻找增广链.

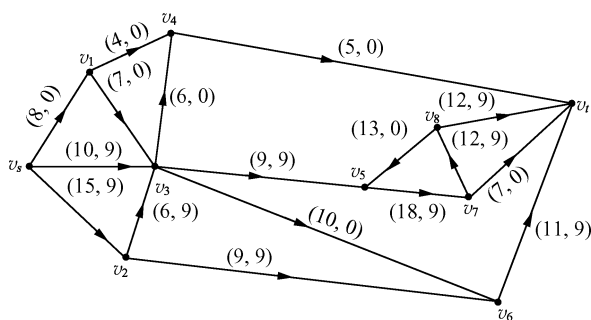


图 11-47

(5) 标号过程.

第 1 步: 首先给 v_s 标号为 $(0, +\infty)$.

第 2 步: 检查 v_s , 对弧 (v_s, v_1) , 且 $f_{s1}=0, c_{s1}=8$, 则 $f_{s1} < c_{s1}$.

给 v_1 标号为 $(v_s, L(v_1))$,

$$L(v_1) = \min \{ L(v_s), c_{s1} - f_{s1} \} = \min \{ +\infty, 8 - 0 \} = 8$$

第 3 步: 检查 v_1 , 对弧 (v_1, v_3) , $f_{13}=0, c_{13}=7$, 则 $f_{13} < c_{13}$. 则给 v_3 标号为 $(v_1, L(v_3))$,

$$L(v_3) = \min \{ L(v_1), c_{13} - f_{13} \} = \min \{ 8, 7 - 0 \} = 7$$

第 4 步: 检查 v_3 , 对于弧 (v_3, v_4) 上 $f_{34}=0, c_{34}=6$. 则 $f_{34} < c_{34}$. 给 v_4 标号为 $(v_3, L(v_4))$.

$$L(v_4) = \min \{ L(v_3), c_{34} - f_{34} \} = \min \{ 7, 6 - 0 \} = 6$$

第 5 步: 检查 v_4 , 对于弧 (v_4, v_t) 上 $f_{4t}=0, c_{4t}=5$, 则 $f_{4t} < c_{4t}$. 给 v_t 标号为 $(v_4, L(v_t))$,

$$L(v_t) = \min \{ L(v_4), c_{4t} - f_{4t} \} = \min \{ 6, 5 - 0 \} = 5$$

则 v_t 有标号, 故转入调整过程.

(6) 调整过程.

按点的第一个标号找到一条增广链. 如图 11-48 中的“/”表示.

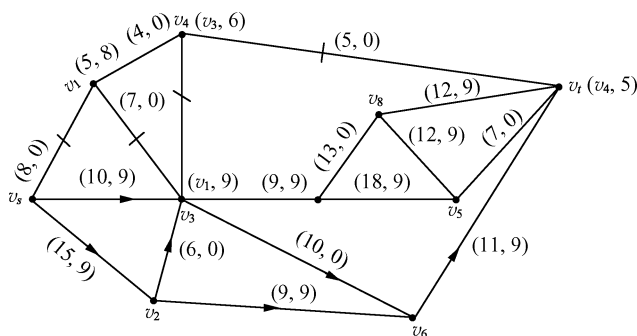


图 11-48

取 $\theta=5$, 作调整

$$f_{s1} + 5 = 0 + 5 = 5,$$

$$f_{13} + 5 = 0 + 5 = 5,$$

$$f_{34} + 5 = 0 + 5 = 5,$$

$$f_{4t} + 5 = 0 + 5 = 5$$

调整后得到如图 11-49 所示的可行流, 对这个可行流进入标号过程寻找增广链.

(7) 标号过程.

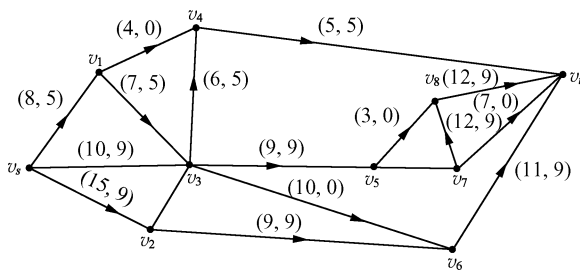


图 11-49

重复标号过程的步骤进行标号,找出增广链,标号如下.

$$v_s(0, +\infty), v_2(v_s, 4), v_3(v_2, 4), v_6(v_3, 4), v_t(v_6, 2)$$

(8) 调整过程.

由 $\theta=2$ 作调整.

$$f_{s2}+2=9+2=11,$$

$$f_{23}+2=0+2=2,$$

$$f_{36}+2=0+2=2,$$

$$f_{6t}+2=9+2=11$$

调整后得到如图 11-50 所示的可行流,对这个可行流进入标号过程,寻找增广链.

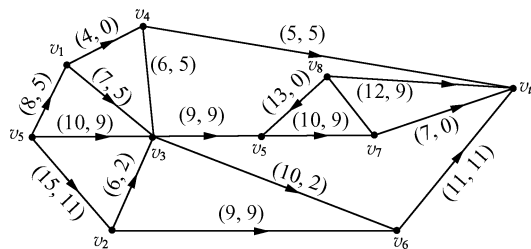


图 11-50

(9) 标号过程.

按照标号过程,得到标号为

$$v_s(0, +\infty), v_1(v_s, 3), v_4(v_1, 3), v_3(v_s, 1), v_6(v_3, 1), v_2(v_s, 4).$$

这时已不存在 v_s 到 v_t 的最短路.即得到最大流

$$\text{最大流为: } v(f^*) = 5+9+11=25.$$

$$\text{最小截集为 } (v_1^*, v_1^*), v_1^* = \{v_s, v_2, v_6, v_3, v_1, v_4\}, \bar{v}_1^* = \{v_5, v_7, v_8, v_t\}.$$

11.14 两家工厂 x_1 和 x_2 生产一种商品,商品通过如图 11-51 所示的网络运送到市场 y_1, y_2, y_3 , 试用标号法确定从工厂到市场所能运送最大总量.

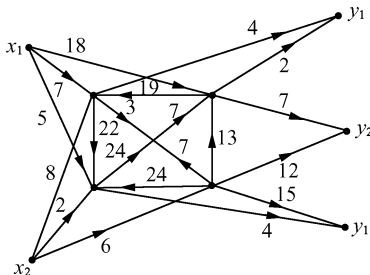


图 11-51

【解】 添加 v_s, v_t 点, 给中间点加上名称, 令所有弧的可行流都为 0, 如图 11-52 所示.

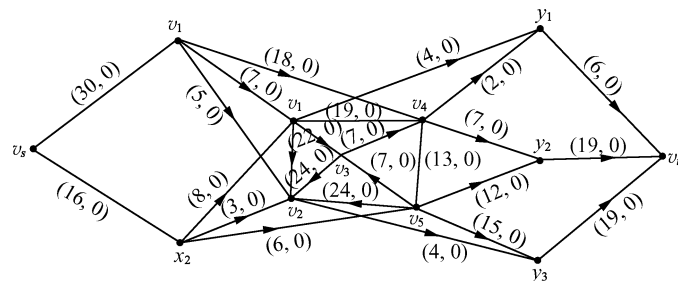


图 11-52

不断重复标号过程及调整过程.

计算得到结果表示在图 11-53 上.

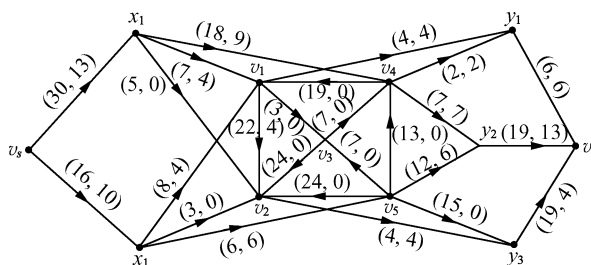


图 11-53

最大流量为:

$$6+13+4=23$$

11.15 求如图 11-54 所示的网络的最小费用最大流, 每弧旁的数字是 (b_{ij}, c_{ij}) .

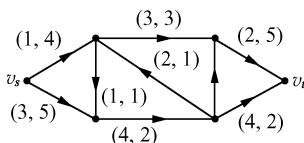


图 11-54

【解】 给题设中的图的中间点加上名称如图 11-55 所示.

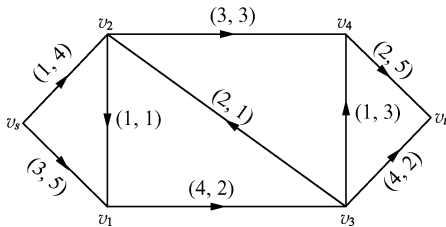


图 11-55

(1) 取 $f^{(0)} = 0$ 为初始可行流.

(2) 构造有向赋权图 $w(f^{(0)})$.

① 当 (v_i, v_j) 为前向弧时,

$$w_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{若 } f_{ij} < c_{ij} \\ +\infty, & f_{ij} = c_{ij} \end{cases}$$

② 当 (v_i, v_j) 为后向弧时,

$$w_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{若 } f_{ij} > 0 \\ +\infty, & f_{ij} = 0 \end{cases}$$

求出从 v_s 到 v_t 的最短路 (v_s, v_2, v_4, v_t) , 如图 11-56 所示 (标有“/”为最短路).

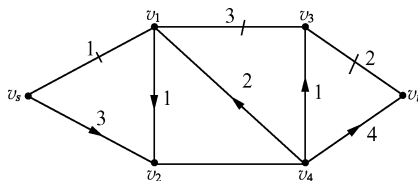


图 11-56

③ 在原网络 D 中,与这条最短路相应的增广链为 $\mu = \{v_s, v_2, v_4, v_t\}$.

(3) 在 μ 上进行调整. $\theta=3$, 得图 $f^{(1)}$.

按照上述算法依次得 $f^{(2)}, f^{(3)}$. 流量依次为 3, 4, 5. 构造相应的赋权图: $w(f^1), w(f^2), w(f^3)$.

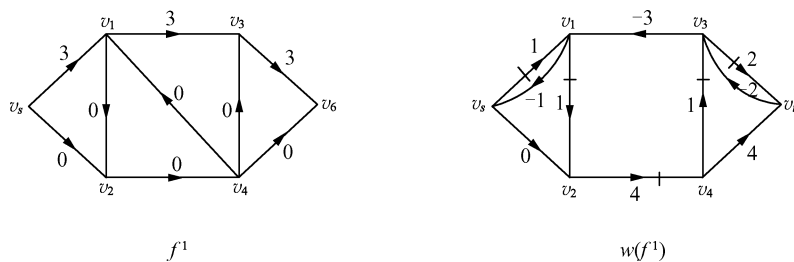


图 11-57

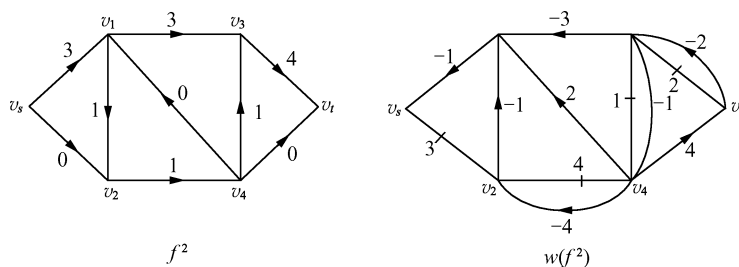


图 11-58

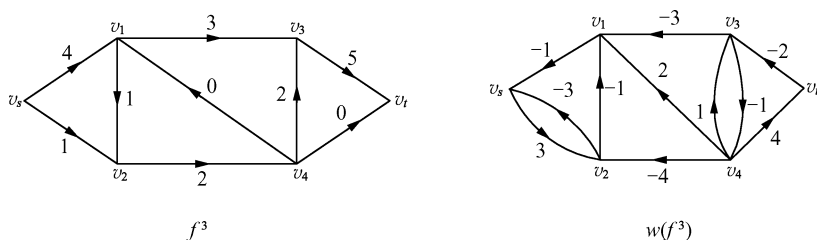


图 11-59

注意到 $w(f^3)$ 中已不存在从 v_s 到 v_t 的最短路, 所以 $f^{(3)}$ 即为最小费用最大流.

最大流为: $5+0=5$.

总费用为:

$$4 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 1 + 5 \times 2 = 37$$

11.16 求如图 11-60 所示的中国邮递员问题.

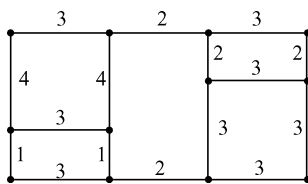


图 11-60

【解】 图中有 4 组奇点, 分别为 v_2 和 v_5 , v_4 和 v_7 , v_6 和 v_9 , v_8 和 v_{11} . 然后得图中奇点按最短连线两两

由上图可知:

- (1) 在图的每一条边上至多有一条重复边.
(2) 图中每圈上重复边的总权不大于该圈总权的一半.
故任一欧拉圈就是邮递员的最优邮递路线.

【证明】(1) 由题设, $G(V, E)$ 是简单圈, 即该图中无环, 无重复边. 由已知, $\delta(G) \geq 2$, 即 G 的最小边数大于或等于 2. 假设 G 中无圈, 则 G 可能为树或非连通图, 对该两种情况均存在悬挂点, 即 $\min_{v \in V} \{d(v)\} = 1$, 与 $\delta_1(G) \geq 2$ 矛盾, 故假设不成立, G 必有圈.

11.18 设 G 是一个连通图, 不含奇点. 证明: G 中不含割边.

11.19 给一个连通赋权图 G , 类似于求 G 的最小支撑树的 Kruskal 方法, 给出一个求 G 的最大支撑树的方法.

【解】 首先选一条最大权边,以后每步均从未被选取的边中选最大权边,并使之与已选取的边不构成圈(如在某步中有两条或两条以上的边都是最大权边,则从中任取一条.)

11.20 下述论断正确与否:可行流 f 的流量为零,即 $v(f)=0$,当且仅当 f 是零流.

【解】 论断错误,流量

$$v(f) = \sum_{(v_s, v_i) \in A} f_{sj} - \sum_{(v_i, v_s) \in A} f_{js} = 0$$

只表明发点净流出量为容,可能流出等于流入,而 f 为零流,则 $f_{ij}=0$ 。如对以下简单网络如图 11-62 所示。

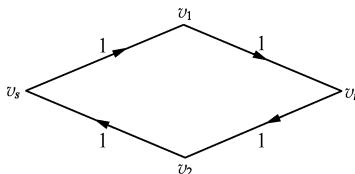


图 11-62

$$v(f) = 1 - 1 = 0$$

而 $f_{ij} = 1 \neq 0$, 非零流

11.21 设 $D = \{v, A, C\}$ 是一个网络. 证明: 如果 D 中所有弧的容量 c_{ij} 都是整数, 那么必存在一个最大流 $f = \{f_{ij}\}$, 使所有 f_{ij} 都是整数.

【解】 由标号法, 初始 $f_{ij} = 0$.

因对弧 $(v_i, v_j), v_j$ 标号, $c(v_j) = \min\{c(v_i), c_{ij} - f_{ij}\}$.

弧 $(v_j, v_i), v_j$ 标号, $c(v_i) = \min\{c(v_j), f_{ij}\}$.

依此类推, 因 c_{ij} 均为整数, 故最终得到调整量 $\theta = c(v)$ 也为整数.

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta, & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta, & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}, & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$$

标号最终结果, 得最大流 f 必为整数.

11.22 已知有六台机床 $x_1, x_2, \dots, x_6$, 六个零件 $y_1, y_2, \dots, y_6$. 机床 x_1 可加工零件 y_1 ; x_2 可加工零件 y_1, y_2 ; x_3 可加工零件 y_1, y_2, y_3 ; x_4 可加工零件 y_2 ; x_5 可加工零件 y_2, y_3, y_4 ; x_6 可加工零件 y_2, y_5, y_6 . 现在要求制订一个加工方案, 使一台机床只加工一个零件, 一个零件只在一台机床上加工, 要求尽可能多地安排零件的加工. 试把这个问题化为求网络最大流的问题, 求出能满足上述条件的加工方案.

【解】 由题设, 添上标号 v_s 和 v_t 可得最大容量的网络图如图 11-63 所示. ($f^{(0)} = 0$)

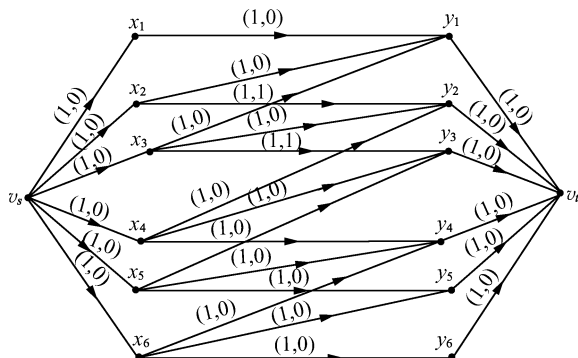


图 11-63

(1) 由题 11.13 的方法进行标号, 得到增广链.

$$v_s \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow x_t$$

因 v_t 已标号, 转入调整过程.

(2) 调整过程.

由点的第一个标号找到一条增广链.

$$\mu = (v_s, x_1, y_1, x_t)$$

依据 $\theta = 1$ 在 μ 上调整.

$$f_{v_s x_1} + 1 = 1, \quad f_{x_1 y_1} + 1 = 1, \quad f_{y_1 x_t} + 1 = 1$$

调整后得如图 11-64 所示的可行流, 对这个可行流进入标号过程, 寻找增广链.

反复进行标号和调整过程, 得到结果如图 11-65 所示.

由

$$v_s \xrightarrow{(1,1)} x_1 \xrightarrow{(1,1)} y_1 \xrightarrow{(1,1)} v_t, \quad v_s \xrightarrow{(1,1)} x_2 \xrightarrow{(1,1)} y_2 \xrightarrow{(1,1)} v_t$$

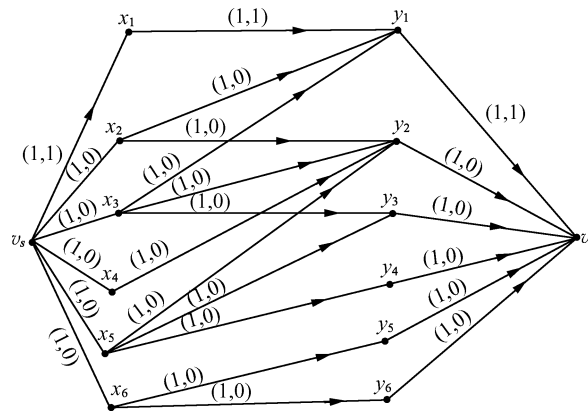


图 11-64

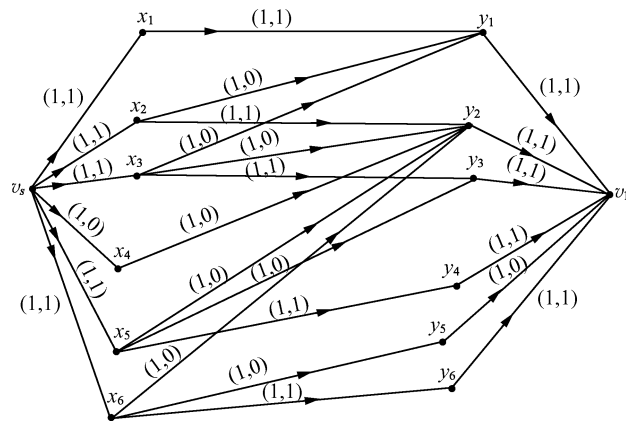


图 11-65

$$\begin{aligned}
 &v_s \xrightarrow{(1,1)} x_3 \xrightarrow{(1,1)} y_3 \xrightarrow{(1,1)} v_t, \quad v_s \xrightarrow{(1,1)} x_5 \xrightarrow{(1,1)} y_4 \xrightarrow{(1,1)} v_t \\
 &v_s \xrightarrow{(1,1)} x_6 \xrightarrow{(1,1)} y_6 \xrightarrow{(1,1)} v_t
 \end{aligned}$$

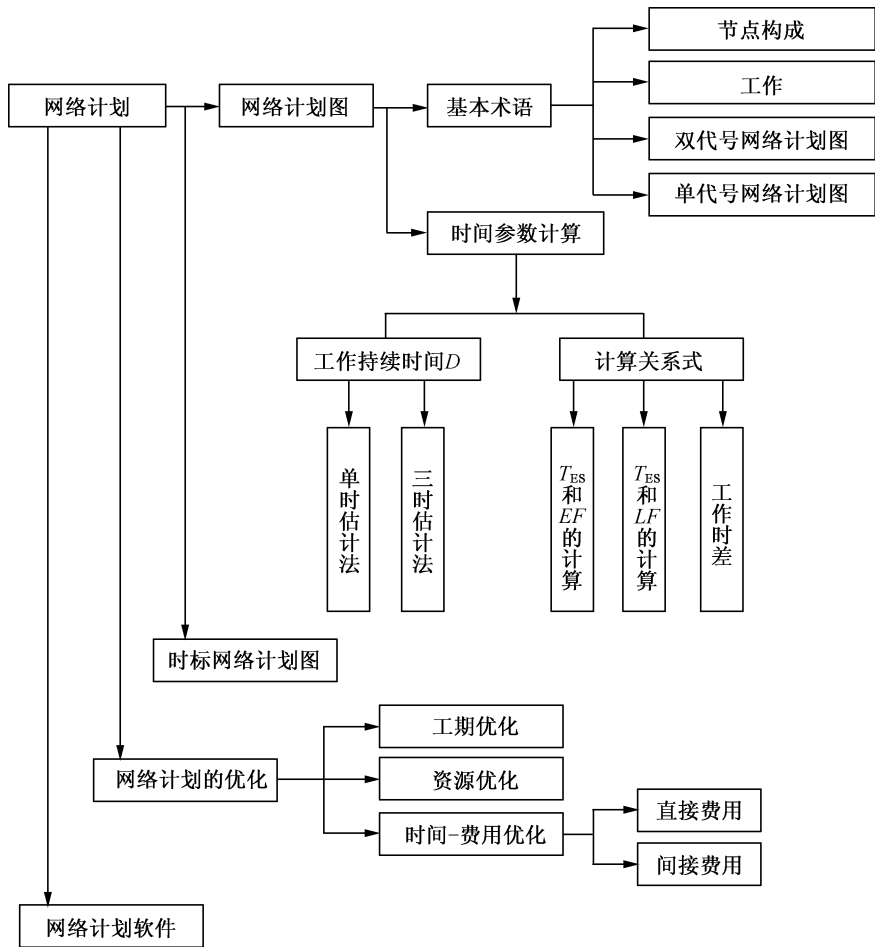
得到加工方案为

机床 \ 零件	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_6

机床 x_4 不加工零件, 零件 y_5 没有机床加工. $v(f) = 5$.

第 12 章 网络计划

知识结构图



学习要求

1. 掌握网络计划中相关的概念.
2. 正确绘制网络图,注意在绘制中的技巧.
3. 正确计算网络图中的时间参数,特别要注意结点的时间参数和作业的时间参数之间的关系和基本概念.
4. 确定关键路线,分析并讨论.
5. 优化网络图,重点在时间(工期),费用及人力安排上.
6. 工期完成概率,总时差利用的分析与讨论.

重点、难点解答

1. 关键路线法(CPM-Critical Path Method)是借助于网络图的分析,研究各项工作(作业)所需要的时间参数,各项作业的相互关系等,找出在编制计划过程中的关键路线。

图解评审方法(PERT—Program Evaluation and Review Technique)是在应用网络分析的基础上,更注重于对各项工作安排的评审,评价和控制好各阶段的工作。PE 由于这两种方法在原理和方法上的类似性及侧重点不同,通常将这两种方法结合在一起,形成较完整、较系统的分析方法,称之为网络技术或网络计划。

网络计划的优点在于它特别适用于生产技术复杂、工作项目繁多的项目计划安排上,如产品研制开发,工程项目,生产准备,设备大修等。对优化时间、资源、人力及费用方面具有很强的实用性。他是运筹学应用于实际中案例成功最多的一种方法。

2. 网络图的绘制最终是为了分析、控制和优化。一般地说,一个未经多次修改的网络图不可能是最佳的。实际中,最佳要求是多方面的。根据研究对象对进度,费用,人才等方面进行分析和优化。

最典型的有 3 种:缩短工程进度,降低成本费用,资源平衡利用优化。

课后习题全解

12.1 已知下列资料:

表 12-1

工序	紧前工序	工序时间	工序	紧前工序	工序时间	工序	紧前工序	工序时间
A	G, M	3	E	C	5	I	A, L	2
B	H	4	F	A, E	5	K	F, I	1
C	—	7	G	B, C	2	L	B, C	7
D	L	3	H	—	5	M	C	3

要求:(1) 绘制网络图;

(2) 用图上计算法计算各项时间参数(r 除外);

(3) 确定关键路线。

【解】 (1) 网络图如图 12-1 所示。

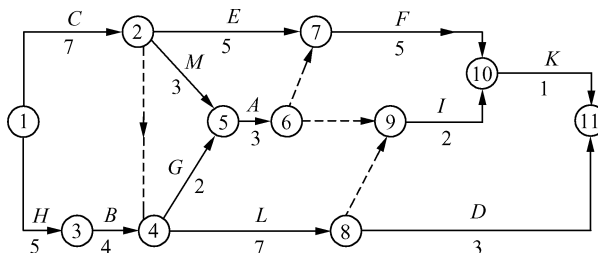


图 12-1

(2) 各工序最早开工时间 T_{ES} , 最早完工时间 T_{EF} , 最迟开工时间 T_{LS} , 最迟完工时间 T_{LE} 及总时差 TF , 关键工序如表 12-2 所示。

表 12-2

工序	<i>i</i>	<i>j</i>	工序时间	T_{ES}	T_{EF}	T_{LS}	T_{LF}	TF	关键工序
<i>C</i>	1	2	7	0	7	1	8	1	
<i>H</i>	1	3	5	0	5	0	5	0	*
虚	2	4	0	7	7	9	9	2	
<i>m</i>	2	5	3	7	10	8	11	1	
<i>E</i>	2	7	5	7	12	9	14	2	
<i>B</i>	3	4	4	5	9	5	9	0	*
<i>G</i>	4	5	2	9	11	9	11	0	*
<i>L</i>	4	8	7	9	16	10	17	1	
<i>A</i>	5	6	3	11	14	11	14	0	*
虚	6	7	0	14	14	14	14	0	
虚	6	9	0	14	14	17	17	3	
<i>F</i>	7	10	5	14	19	14	19	0	*
虚	8	9	0	16	16	17	17	1	
<i>D</i>	8	11	3	16	19	17	20	1	
<i>I</i>	9	10	2	16	18	17	19	1	
<i>K</i>	10	11	1	19	20	19	20	0	*

(3) 由上表可知,关键路线为

①→③→④→⑤→⑥→⑦→⑩→⑪

对应的工序为

H→*B*→*G*→*A*→*F*→*K*

12.2 已知下列资料:

表 12-3

工序	紧前工序	工序时间	工序	紧前工序	工序时间	工序	紧前工序	工序时间
<i>a</i>	—	60	<i>g</i>	<i>b, c</i>	7	<i>m</i>	<i>j, k</i>	5
<i>b</i>	<i>a</i>	14	<i>h</i>	<i>e, f</i>	12	<i>n</i>	<i>i, l</i>	15
<i>c</i>	<i>a</i>	20	<i>i</i>	<i>f</i>	60	<i>o</i>	<i>n</i>	2
<i>d</i>	<i>a</i>	30	<i>j</i>	<i>d, g</i>	10	<i>p</i>	<i>m</i>	7
<i>e</i>	<i>a</i>	21	<i>k</i>	<i>h</i>	25	<i>q</i>	<i>o, p</i>	5
<i>f</i>	<i>a</i>	10	<i>l</i>	<i>j, k</i>	10			

- 要求:(1) 绘制网络图;
(2) 计算各项时间参数;
(3) 确定关键路线.

【解】 (1) 由题意, 网络图如图 12-2 所示:

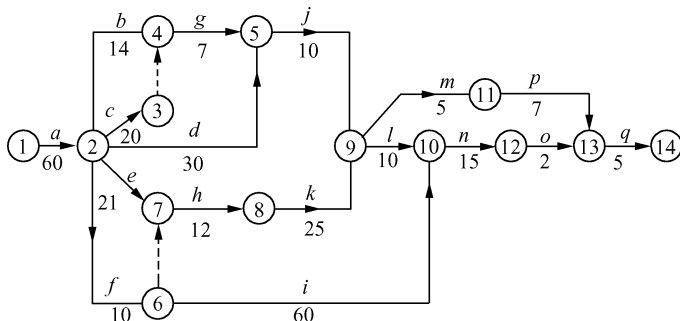


图 12-2

(2) 各工序事项最早时间和事项最迟时间分别为: ① 0, 0; ② 60, 60; ③ 80, 118; ④ 80, 118; ⑤ 90, 125; ⑥ 70, 70; ⑦ 81, 98; ⑧ 93, 110; ⑨ 118, 135; ⑩ 130, 130; ⑪ 123, 140; ⑫ 145, 145; ⑬ 147, 147; ⑭ 152, 152.

(3) 关键路线为: ①→②→⑥→⑩→⑫→⑬→⑭, 对应的工序为: $a \rightarrow f \rightarrow i \rightarrow n \rightarrow o \rightarrow q$

12.3 已知下列资料:

表 12-4

活 动	作业时间	紧前活动	正常完成进度的直接费用(百元)	赶进度一天所需费用(百元)
A	4		20	5
B	8		30	4
C	6	B	15	3
D	3	A	5	2
E	5	A	18	4
F	7	A	40	7
G	4	B、D	10	3
H	3	E、F、G	15	6
合计			153	
工程的间接费用			5(百元/天)	

求出该项工程的最低成本日程.

【解】 由题设绘制网络图如图 12-3 所示:

图中: 箭线 A、B、C、D、E、F、G、H 分别代表 8 个工序. 箭线旁边的数字分别表示为完成该个工序所需的时间(天数).

结点①、②、③、④、⑤、⑥、⑦、⑧分别表示工序的开始和结束. 在上述网络中, 各事项的最早时间分别为:

$$T_E(1) = 0$$

$$T_E(2) = T_E(1) + T(1, 2) = 0 + 8 = 8_j$$

$$T_E(3) = T_E(1) + T(1, 3) = 0 + 4 = 4$$

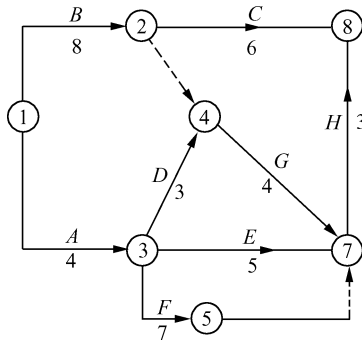


图 12-3

$$T_E(4) = \max \{ T_E(3) + T(3,4), T_E(2) + T(2,4) \}$$

$$= \max \{ 4+3, 8+0 \} = 8$$

$$T_E(5) = T_E(3) + T(3,5) = 4+7 = 11$$

$$T_E(7) = \max \{ T_E(4) + T(4,7), T_E(3) + T(3,7), T_E(5) + T(5,7) \}$$

$$= \max \{ 8+4, 4+5, 11+0 \}$$

$$= \max \{ 12, 9, 11 \}$$

$$= 12$$

$$T_E(8) = \max \{ T_E(2) + T(2,8), T_E(7) + T(7,8) \}$$

$$= \max \{ 8+6, 12+3 \}$$

$$= \max \{ 14, 15 \}$$

$$= 15$$

对于上述网络图中, 计算各事项最迟时间为:

$$T_L(8) = 15;$$

$$T_L(7) = T_L(8) - T(7,8) = 15-3 = 12;$$

$$T_L(4) = T_L(7) - T(4,7) = 12-4 = 8$$

$$T_L(2) = \min \{ T_L(8) - T(2,8), T_L(4) - T(2,4) \}$$

$$= \min \{ 15-6, 8-0 \}$$

$$= \min \{ 9, 8 \}$$

$$= 8$$

$$T_L(3) = \min \{ T_L(4) - T(3,4), T_L(7) - T(3,7), T_L(5) - T(3,5) \}$$

$$= \min \{ 8-3, 12-5, 12-7 \}$$

$$= \min \{ 5, 7, 5 \}$$

$$= 5$$

$$T_L(1) = \min \{ T_L(2) - T(1,2), T_L(3) - T(1,3) \}$$

$$= \min \{ 8-8, 5-4 \}$$

$$= \min \{ 0, 1 \}$$

$$= 0$$

由于事项的最早时间与事项最迟时间相等时为关键工序.

从而可得关键路线为:

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{7} \rightarrow \textcircled{8}$$

对应的关键工序为

$B \rightarrow G \rightarrow H$

由题设,工程工期为 15 天,则工程的直接费用(各工序直接费用之和)为

$$(20+30+15+5+18+40+10+15) \times 100 = 15\,300 \text{ 元}$$

间接费用为

$$15 \times 500 = 7\,500 \text{ 元}$$

总费用为

$$15\,300 + 7\,500 = 22\,800 \text{ 元}$$

以上这个按正常时间进行的方案称作第 I 方案.

若要第 I 方案的完工时间,首先要缩短关键路线上直接费用变动率最低的工序的作业时间.

例如,关键路线 B, G, H 中,工序中 B, G 的直接费用率低于间接费用.缩短 G 工序 1 天,此时总费用为

$$22\,800 + (300 - 500) = 22\,600 \text{ 元}$$

则关键路线有三条,分别为

B, G, H ; B, C_j ; A, D, G, H_j

为第 II 方案.

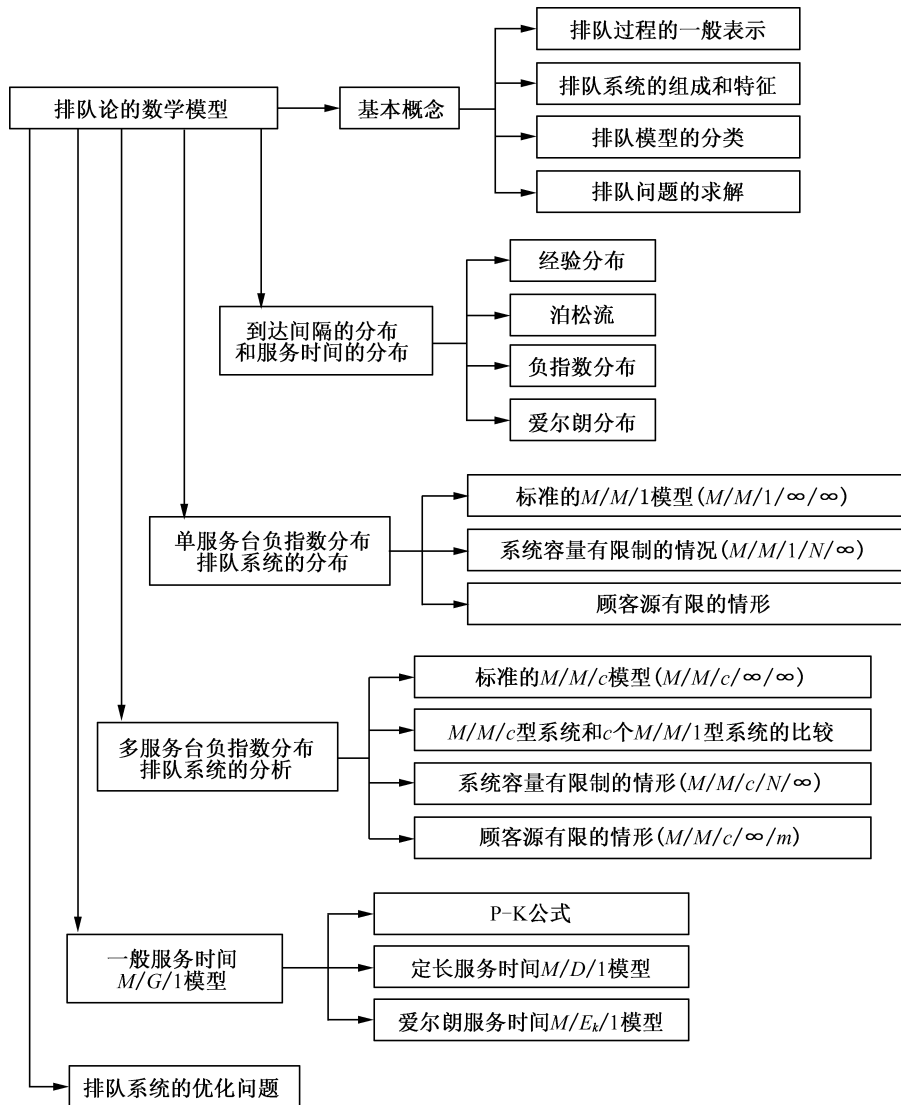
此时缩短工期减少间接费用,要大大增加三条关键路线的直接费用.

由最低成本方程,第 II 方案为最优方案.

故工程为 14 天时,总成本最低.

第 13 章 排队论

知识结构图



学习要求

1. 掌握排队系统的级成及基本特征.
2. 熟练排队模型研究的问题及排队模型的种类.

3. 熟练掌握各种常见排队模型的状态转移关系图和各状态间的转移差分方程, 系统运行指标.
4. 掌握常见的排队模型及其各种系统运行指标.

重点、难点解答

1. 对于泊松输入-负指数服务的排队系统, 一般的解决过程可简单的抽象成如下的过程:

① 根据已知条件绘制状态转移速度图, 其中的核心在于确定各种可能的状态以及各状态之间的转移概率.

② 依据状态转移速度图写出各状态之间的关系.

③ 求出 P_0 和 P_n .

④ 计算各项数量运行指标.

⑤ 用系统运动指标构造目标函数, 对系统进行优化.

2. 泊松输入-负指数服务, 服务台是并联的情况是很经典的问题, 当服务台是串联或串并联时, 或者当输入过程或服务时间服从其他分布时, 情况要复杂一些, 有时无法解析地计算各项数量指标, 需要用模拟仿真的方法加以研究.

课后习题全解

13.1 某工地为了研究发放工具应设置几个窗口, 对于请领和发放工具分别做了调查记录:

(1) 以 10 分钟为一段, 记录了 100 段时间内每段到来请领工具的工人数, 见表 13-1;

表 13-1

每 10 分钟内领工具人数	次 数	每 10 分钟内领工具人数	次 数
5	1	16	13
6	0	17	10
7	1	18	9
8	1	19	7
9	1	20	4
10	2	21	3
11	4	22	3
12	6	23	1
13	9	24	1
14	11	25	1
15	12	合计	100

(2) 记录了 1 000 次发放工具(服务)所用时间(秒)见表 13-2, 试求:

表 13-2

发放时间/秒	次数	发放时间/秒	次数
15	200	165	16
30	175	180	12
45	140	195	10
60	104	210	7
75	78	225	9
90	69	240	9

续表 13-2

发行时间/秒	次数	发行时间/秒	次数
105	51	255	3
120	47	270	1
135	38	285	1
150	30	合计	1 000

① 平均到达率和平均服务率(单位:分)

② 利用统计学的方法证明:若假设到来的数是服从参数 $\lambda = 1.6$ 的普阿松分布,服务时间服从参数 $\mu = 0.9$ 的负指数分布,这是可以接受的.

(3) 这时只设一个服务员是不行的,为什么? 试分别就服务员数 $c = 2, 3, 4$ 各情况计算等待时间 W_q , 注意用表 13-3.

表 13-3 多服务台 $W_q \cdot \mu$ 的数值表

$\lambda/c\mu$	服 务 台 数				
	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$
0.1	0.111 1	0.010 1	0.001 4	0.000 2	0.000 0*
0.2	0.250 0	0.041 7	0.010 3	0.003 0	0.001 0
0.3	0.428 6	0.098 9	0.033 3	0.013 2	0.005 8
0.4	0.666 7	0.190 5	0.078 4	0.037 8	0.019 9
0.5	1.000 0	0.333 3	0.157 9	0.087 0	0.052 1
0.6	1.500 0	0.562 5	0.295 6	0.179 4	0.118 1
0.7	2.333 3	0.960 8	0.547 0	0.357 2	0.251 9
0.8	4.000 0	1.777 8	1.078 7	0.745 5	0.554 1
0.9	9.000	4.263 2	2.723 5	1.969 4	1.525 0
0.95	19.000 0	9.256 4	6.046 7	4.457 1	3.511 2

(4) 设请领工具的工人等待的费用损失为每小时 6 元,发放工具的服务员空闲费用损失为每小时 3 元,每天按八小时计算,问设几个服务员使总费用损失为最小?

【解】 (1) 平均到达率 = $\frac{\text{到达总数}}{\text{总时间}}$

则 $\lambda = [5 \times 1 + 6 \times 0 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 1 + 10 \times 2 + 11 \times 4 + 12 \times 6 + 13 \times 9 + 14 \times 11 + 15 \times 12 + 16 \times 13 + 17 \times 10 + 18 \times 9 + 19 \times 7 + 20 \times 4 + 21 \times 3 + 22 \times 3 + 23 \times 1 + 24 \times 1 + 25 \times 1] \div 1\,000$
 $= 1\,570 \div 1\,000 = 1.57$ (人/分)

平均服务率 = $\frac{\text{服务总数}}{\text{总时间}}$

总时间 = $0.25 \times 200 + 0.5 \times 175 + 0.75 \times 140 + 1 \times 104 + 1.25 \times 78 + 1.5 \times 69 + 1.75 \times 51 + 2 \times 47 + 2.25 \times 38 + 2.5 \times 30 + 2.75 \times 16 + 3 \times 12 + 3.25 \times 10 + 3.5 \times 7 + 3.75 \times 9 + 4 \times 9 + 4.25 \times 3 + 4.5 \times 1 + 4.75 \times 1$
 $= 1\,120$ (分)

$$\text{则 } \mu = \frac{1\,000}{1\,120} = 0.96 \text{ (人/分)}$$

(2) 令 $p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ ($n=0, 1, 2, \dots, t>0$) 表示长为 t 时间内到达 n 个顾客的概率, 随机变量 $\{N(t) = N(s+t) - N(s)\}$ 服从泊松分布, 且有 $E[N(t)] = \lambda t$, 则单位时间内平均到达率为 λ , 而此处 $\lambda = 1.57$ (人/分). 因此假设到来的人数服从参数 $\lambda = 1.6$ 的泊松分布是可以接受的.

对于负指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{得 } E(x) = \frac{1}{\mu}$$

即平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$, 亦即单位时间服务 μ 人.

由题设计算 $\mu = 0.96$ (人/分), 故假设 $\mu = 0.9$ 的负指数分布是可以接受的.

(3) 因为

$$\lambda = 1.57 \text{ (人/分)}, \quad \mu = 0.96 \text{ (人/分)} \quad \lambda > \mu$$

若只设一个服务员, 由于平均到达率大于平均服务率, 将使队伍越排越长.

① 当 $c=2$ 时

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1.6}{2 \times 0.9} \approx 0.9 \text{ 查表 } 13-3$$

$$W_q \times \mu = 4.2632$$

$$W_q = \frac{4.2632}{0.9} = 4.748 \text{ 分}$$

② 当 $c=3$ 时

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1.6}{3 \times 0.9} \approx 0.6 \text{ 查表 } 13-3$$

$$W_q \times \mu = 0.2956$$

$$W_q = \frac{0.2956}{\mu} = \frac{0.2956}{0.9} \approx 0.33 \text{ (分)}$$

③ 当 $c=4$ 时

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{1.6}{4 \times 0.9} = 0.44 \text{ 查表 } 13-3 \text{ 用插值法可得}$$

$$W_q \times \mu = 0.0597$$

$$W_q = \frac{0.0597}{\mu} = \frac{0.0597}{0.9} = 0.067 \text{ (分)}$$

(4) 由 $\lambda = 1.6$ 人/分, 则每天平均到达人数为:

$$1.6 \times 60 \times 8 = 768 \text{ (人)}$$

需服务时间

$$T = \frac{768}{0.9} = 853 \text{ (分)}$$

① 当 $c=2$ 时, 损失值为:

$$\frac{4.43 \times 768}{60} \times 6 + \frac{8 \times 60 \times 2 - 853}{60} \times 3 \approx 346 \text{ (元)}$$

② 当 $c=3$ 时, 损失值为:

$$\frac{0.33 \times 768}{60} \times 6 + \frac{8 \times 60 \times 3 - 853}{60} \times 3 \approx 55 (\text{元})$$

③ 当 $c=4$ 时, 损失值为:

$$\frac{0.067 \times 768}{60} \times 6 + \frac{8 \times 60 \times 4 - 853}{60} \times 3 \approx 58 (\text{元})$$

为使总费用最小, 应设 3 个服务台.

13.2 某修理店只有一个修理工人, 来修理的顾客到达次数服从泊松分布, 平均每小时 4 人, 修理时间服从负指数分布, 平均需 6 分钟, 求:

- (1) 修理店空闲时间概率;
- (2) 店内有 3 个顾客的概率;
- (3) 店内至少有 1 个顾客的概率;
- (4) 在店内顾客平均数;
- (5) 在店内平均逗留时间;
- (6) 等待服务的顾客平均数;
- (7) 平均等待修理(服务)时间;
- (8) 必须在店内消耗 15 分钟以上的概率.

【解】 由题设, 系统为 $(M/M/1/\infty/\infty)$ 模型.

$$\lambda = 4 \text{ 人/小时}; \mu = \frac{60}{6} = 10 \text{ 人/小时}; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{10}$$

则

$$(1) p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$$

$$(2) p_3 = (1 - \rho) \rho^3 = \left(1 - \frac{4}{10}\right) \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{384}{10^4}$$

$$(3) \text{ 店内至少有一个顾客的概率为 } 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = \frac{4}{10}$$

$$(4) L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{10 - 4} = \frac{2}{3} (\text{人})$$

$$(5) W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda(\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10 - 4} = \frac{1}{6} (\text{小时})$$

$$(6) L_q = \frac{\rho \lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{4}{10} \times 4}{10 - 4} = \frac{4}{15} (\text{人})$$

$$(7) W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho \lambda}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{4}{10}}{10 - 4} = \frac{1}{15} (\text{小时})$$

(8) 因为修理时间服从负指数分布

$$\begin{aligned} p\left\{T \geq \frac{15}{60}\right\} &= p\left\{T \geq \frac{1}{4}\right\} = 1 - p\left\{T \leq \frac{1}{4}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - (1 - e^{-(\mu - \lambda) \times \frac{1}{4}}) = e^{-(10 - 4) \times \frac{1}{4}} = e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

13.3 在某单人理发店顾客到达为泊松流, 平均到达间隔为 20 分钟, 理发时间服从负指数分布, 平均时间为 15 分钟. 求:

- (1) 顾客来理发不必等待的概率;
- (2) 理发店内顾客平均数;

- (3) 顾客在理发馆内平均逗留时间;
 (4) 若顾客在店内平均逗留时间超过 1.25 小时,则店主将考虑增加设备及理发员,问平均到达率提高多少时店主才做这样考虑呢?

【解】 由题设,系统为 $M/M/1$ 排队模型.

$$\lambda = \frac{60}{20} = 3 \text{ (人/h)}, \quad \mu = \frac{60}{15} = 4 \text{ (人/h)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$$

$$(1) p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(2) L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{4 - 3} = 3 \text{ (人)}$$

$$(3) W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4 - 3} = 1 \text{ (h)}$$

$$(4) \text{ 由 } W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \geq 1.25$$

$$\frac{1}{4 - \lambda} \geq 1.25, \text{ 则 } \lambda \geq 3.2$$

则 $\lambda = 3.2 - 3 = 0.2 \text{ (人/h)}$

即平均到达率提高 0.2 人/h 时,店主才会考虑增加设备及理发员.

13.4 在例 3 中(1)试求系统中(包括手术室和候诊室)有 0、1、2、3、4、5 个病人的概率.(2) 设 λ 不变而 μ 是可控制的,证明:若医院管理人员认为使病人在医院平均耗费时间超过 2 小时是不允许的,那么必须平均服务率 μ 达到 2.6 (人/小时)以上.

【解】 (1) 由 $\lambda = 2.1, \mu = 2.5$, 有

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2.1}{2.5} = 0.84$$

则

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0.84 = 0.16$$

$$p_1 = p_0 \rho = (1 - \rho) \rho = 0.16 \times 0.84 = 0.134$$

$$p_2 = (1 - \rho) \rho^2 = 0.16 \times 0.84^2 = 0.113$$

$$p_3 = p_0 \rho^3 = (1 - \rho) \rho^3 = 0.16 \times 0.84^3 = 0.095$$

$$p_4 = p_0 \rho^4 = (1 - \rho) \rho^4 = 0.16 \times 0.84^4 = 0.08$$

$$p_5 = p_0 \rho^5 = (1 - \rho) \rho^5 = 0.16 \times 0.84^5 = 0.067$$

(2) 因为

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - 2.1} \leq 0.5$$

则 $\mu - 2.1 \geq 0.5, \mu \geq 2.6$

即平均服务率 μ 必须达到 2.6 人/h 以上.

13.5 称顾客为等待所费时间与服务时间之比为顾客损失率,用 R 表示.

$$(1) \text{ 试证:对于 } M/M/1 \text{ 模型 } R = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(2) 在例 3 中仍设 λ 不变, μ 是可控制的,试定 μ 使顾客损失率小于 4.

【解】 在 $M/M/1$ 模型中:

$$w_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (\text{其中 } \rho = \frac{\lambda}{\mu})$$

(1) 由题设定义有

$$R = \frac{W_q}{\frac{1}{\mu}} = \mu \cdot W_q = \mu \cdot \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \mu \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(2) 要使 $R < 4$, λ 不变, μ 为可控制的, 即

$$\frac{\lambda}{\mu - \lambda} < 4, \text{ 即 } \frac{2.1}{\mu - 2.1} < 4$$

$$\mu - 2.1 > \frac{2.1}{4}, \quad \mu > 2.62 \text{ (人/h)}$$

当 μ 大于 2.62 人/h 时, 顾客损失率小于 4.

13.6 设 n_s 表示系统中顾客数, n_q 表示队列中等候的顾客数, 在单服务台系统中, 我们有

$$n_s = n_q + 1 \quad (n_s, n_q > 0)$$

试说明它们的期望值

$$L_s \neq L_q + 1$$

$$L_s = L_q + \rho$$

根据这关系式给 ρ 以直观解释.

【解】 因为为单服务台, 只有超过 1 个顾客时, 才会出现排队等待.

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \\ &= L_s - \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n - p_0 \right) \\ &= L_s - (1 - p_0) \\ &= L_s - \rho \end{aligned}$$

则 $L_s = L_q + \rho$

由系统中的顾客数和等候服务的顾客数期望值之间的相差为 ρ , 则 ρ 的直观解释为服务台的忙的程度, 即服务台的利用率.

13.7 某工厂为职工设立了昼夜 24 小时都能看病的医疗室(按单服务台处理). 病人到达的平均间隔时间为 15 分钟, 平均看病时间为 12 分钟, 且服从负指数分布, 因工人看病每小时给工厂造成损失为 30 元.

(1) 试求工厂每天损失期望值;

(2) 问平均服务率提高多少, 方可使上述损失减少一半?

【解】 (1) 由题设为 $M/M/1$ 模型, 且

$$\mu = \frac{60}{12}, \quad \lambda = \frac{60}{15}$$

$$\text{则 } W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{60}{12} - \frac{60}{15}} = \frac{1}{5-4} = 1$$

即每位病人在系统中的时间期望值为 1 小时.

而每天平均人数:

$$\frac{60}{15} \times 24 = 96$$

则工人每天损失期望值为

$$1 \times 96 \times 30 = 2880 \text{ 元.}$$

(2) 由题设, 要想使损失减少一半, 则必须使得 W_s 减少一半.

则 $W_s = \frac{1}{2}$ 小时, 即

$$\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2}, \frac{1}{\mu - 4} = \frac{1}{2}$$

$$\mu = 6 \text{ (人/h)}$$

则平均服务率提高值为 $6 - 5 = 1$ (人/h)

13.8 对于 $M/M/1/\infty/\infty$ 模型, 在先到先服务情况下, 试证: 顾客排队等待时间分布概率密度是

$$f(w_q) = \lambda(1-\rho)e^{-(\mu-\lambda)w_q}, w_q > 0$$

并根据上式求等待时间的期望值 W_q .

【解】 令 N_1 表示在统计平衡下一个顾客到达时刻看到系统中已有的顾客数, (还包括此顾客), T_q 表示在统计平衡下顾客的等待时间, 则

$$\begin{aligned} p\{T_q > t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} p\{T_q > t, N_1 = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p\{T_q > t | N_1 = n\} \cdot p\{N_1 = n\} \end{aligned}$$

设 $p\{N_1 = n\} = a_n$ 有

$$p\{T_q > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot p\{T_q > t | N_1 = n\}$$

则

$$p\{T_q > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot p\{T_q > t | N_1 = n\} \quad (1)$$

而服务台得空次数 $m(t) < n$ 是新到顾客的等待时间 $T_q > t$ 的充要条件. 则

$$p\{T_q > t | N_1 = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} p\{m(t) = k\}, n \geq 1 \quad (2)$$

另外, 服务时间为负指数分布, 参数为 μ , 则

$$p\{m(t) = k\} = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \quad (3)$$

把③, ②代入①式得

$$p\{T_q > t\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

其中 $p_n = \rho^n(1-\rho)$, 当 $\rho < 1, n \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} p\{T_q > t\} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \cdot \sum_{n=k-1}^{\infty} p_n \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \left(1 - \sum_{n=0}^k p_n\right) \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \left[1 - (1-\rho) \frac{1-p^{k+1}}{1-p}\right] \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \rho^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \rho^k \\
 &= \rho e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu \rho t)^k}{k!} \\
 &= \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, t \geq 0, \rho < 1
 \end{aligned}$$

则顾客在系统中的等待时间分布为

$$W_q(t) = p\{T_q = t\} = 1 - p\{T_q > t\} = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0, \quad \rho < 1$$

$$f[w_q(t)] = w'_q(t) = \begin{cases} 1-\rho & t=0 \\ \lambda(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} & t>0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 E[W_q(t)] &= \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t} dt \\
 &= \lambda(1-\rho) \left(-\frac{1}{\mu(1-\rho)}t - \frac{1}{\mu^2(1-\rho)^2} \right) \cdot e^{-\mu(1-\rho)t} \Big|_0^{+\infty} \quad (\text{分部积分的列表法}) \\
 &= \frac{\lambda(1-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{\lambda}{\mu^2(1-\rho)}
 \end{aligned}$$

13.9 在 $M/M/1/N/\infty$ 模型中, 如 $\rho=1$ ($\lambda=\mu$), 试证: (13-24) 式应为

$$P_0 = P_1 = \cdots = \frac{1}{N+1}$$

于是 $L_s = N/2$

【解】 在 $M/M/1/N/\infty$ 模型中, 其状态转移图如下:

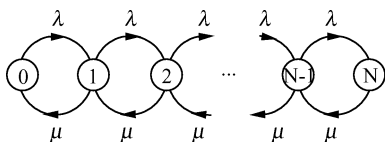


图 13-1

$$\text{则 } p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}$$

又 $\because \rho=1$, 则 $p_n = p_{n-1}$, 依此类推

$$p_0 = p_1 = \cdots = p_N$$

又 $\because \sum_{n=0}^N p_n = 1$, 即 $(p_0 + p_1 + \cdots + p_N) = 1$

$$\text{即 } (N+1)p_0 = 1$$

$$\text{故 } p_0 = \frac{1}{N+1}$$

$$\begin{aligned}
 L_s &= \sum_{n=0}^N n p_n = \sum_{n=0}^N n \cdot \frac{1}{N+1} \\
 &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N n = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N}{2}
 \end{aligned}$$

13.10 对于 $M/M/1/N/\infty$ 模型, 试证:

$$\lambda(1-P_N) = \mu(1-P_0)$$

并对上式给予直观的解释.

【解】 设 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 由 $M/M/1/N/\infty$ 模型的数字特征有

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} = \rho p_{n-1}$$

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{N+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

故

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}} & \rho \neq 1 \quad 0 \leq n \leq N \\ \frac{1}{N+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

当 $\rho = 1$ 时, $p_0 = p_N = \frac{1}{N+1}$, $\lambda = \mu$

显然 $\lambda(1-p_N) = \mu(1-p_0)$

当 $\rho \neq 1$ 时, $p_N = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$, $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

即

$$\begin{aligned} \rho(1-p_N) &= \rho \left(1 - \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}} \right) \\ &= \frac{\rho(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \\ 1-p_0 &= 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \end{aligned}$$

则

$$\rho(1-p_N) = 1-p_0$$

即

$$\frac{\lambda}{\mu}(1-p_N) = 1-p_0$$

故

$$\lambda(1-p_N) = \mu(1-p_0)$$

由于系统的容量为 N , 则有效到达率为:

$$\lambda_e = \lambda(p_0 + p_1 + \cdots + p_N) = \lambda(1-p_N)$$

则有效服务率为:

$$\mu_e = \mu(p_1 + \cdots + p_N) = \mu(1-p_0)$$

当系统平衡时, 有效到达率和有效服务率应当相等. 即

$$\lambda(1-p_N) = \mu(1-p_0)$$

13.11 某新工厂正在决定分配给一个特别的工作中心多少存贮空间. 工作以平均每小时三个的泊松分布被送到工作中心, 工作中心每次只能执行一个工作, 完成该工作所需要的时间遵从每小时 0.25 个的指数分布. 若工作到达时工作中心内已满, 则工作需转放到一个不方便的地方. 如果每个工作在工作中心存放时需要一平方米的空间, 工厂希望工作中心内的空间能够保证 90% 的时间里容纳下全部到达的工作, 需要分配多少空间给工作中心? (提示: 几何数列的和 $\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$)

【解】 此属于 $M/M/1/N/\infty$ 类型,

$$\lambda = 3 \text{ 个/小时}, \mu = 4 \text{ 个/小时}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$$

$$\text{拒绝率为 } P_N = \rho^N P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^N \times \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

$$\text{若要求 } P_N = 1 - 0.9 = 0.1, \text{ 即 } \left(\frac{3}{4}\right)^N \times \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}} = 0.1,$$

$$\text{得 } \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^N$$

$$\text{所以 } N = \log_{\frac{4}{3}} 3.25 = 4.097 \approx 4$$

故需要分配 4 平方米空间给工作中心。

13.12 在习题 13.2 中,如店内已有 3 个顾客,那么后来的顾客即不再排队,其他条件不变.试求

(1) 店内空闲的概率;

(2) 各运行指标 L_s, L_q, W_s, W_q .

【解】 系统为 $M/M/1/N/\infty$ 排队模型.

$$N=3, \lambda=4 \text{ 人/h}, \mu=10 \text{ 人/h}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(1) 店内空闲的概率为

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0.4}{1-0.4^4} = 0.62$$

$$(2) L_s = \sum_{n=0}^N n p_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \frac{0.4}{1-0.4} - \frac{(3+1)0.4^{3+1}}{1-0.4^{3+1}} \approx 0.77$$

$$L_q = \sum_{n=2}^N (n-1)p_n = L_s - (1-p_0) = 0.77 - (1-0.62) = 0.39$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{L_s}{\mu(1-p_0)} = \frac{0.77}{10 \times (1-0.62)} = 0.2$$

$$W_q = w_s - \frac{1}{\mu} = 0.2 - \frac{1}{10} = 0.1$$

13.13 在习题 13.2 中,若顾客平均到达率增加到每小时 12 人,仍为泊松流,服务时间不变,这时增加了一个工人.

(1) 根据 λ/μ 的值说明增加工人的原因.

(2) 增加工人后求店内空闲概率;店内有 2 个或更多顾客(即工人繁忙)的概率.

(3) 求 L_s, L_q, W_s, W_q .

【解】 (1) 由题设, $\lambda = 12 \text{ 人/h}, \mu = 10 \text{ 人/h}$.

当 $c=1$ 时, $\lambda > \mu$, 则系统的输入率大于输出率.显然,队列越来越长,故要增加工人.

(2) 增加一个工人后,系统变为 $M/M/2$ 排队系统. $c=2$

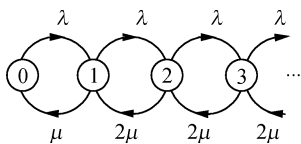


图 13-2

$$\rho_c = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{12}{2 \times 10} = 0.6 < 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{10} = 1.2$$

$$p\{n \geq 2\} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1 - p_0 - p_1$$

$$\begin{aligned} \text{则 } p_0 &= \left[1 + \rho + \frac{1}{c!} \times \frac{1}{1 - \rho_c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \right]^{-1} \\ &= \left[1 + 1.2 + \frac{1 \cdot 2^2}{2!} \times \frac{1}{1 - 0.6} \right]^{-1} \\ &= \left[1 + 1.2 + \frac{1 \cdot 2 \times 0.6}{0.4} \right]^{-1} \\ &= [1 + 1.2 + 1.8]^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$p_1 = \rho p_0 = \frac{12}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\text{则 } p\{n \geq 2\} = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = 0.45$$

$$(3) p_2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{12}{10}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 0.18$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\rho_c}{(1 - \rho_c)^2} p_c \\ &= \frac{0.6}{(1 - 0.6)^2} \times 0.18 = \frac{60}{4 \times 4} \times 0.18 = \frac{27}{40} \end{aligned}$$

$$L_s = L_q + \rho = \frac{27}{40} + \frac{12}{10} = \frac{75}{40} = \frac{15}{8}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{15}{8}}{12} = \frac{15}{96}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{27}{40}}{12} = \frac{27}{480}$$

13.14 有 $M/M/1/5/\infty$ 模型, 平均服务率 $\mu = 10$, 就两种到达率: $\lambda = 6, \lambda = 15$ (分钟) 已计算出相应的概率 P_n 如表 13-4 所示. 试就这两种情况计算:

表 13-4

系统中顾客数 n	$(\lambda = 6) P_n$	$(\lambda = 15) P_n$
0	0.42	0.05
1	0.25	0.07
2	0.15	0.11
3	0.09	0.16
4	0.05	0.24

5	0.04	0.37
---	------	------

- (1) 有效到达率和服务台的服务强度;
 (2) 系统中平均顾客数;
 (3) 系统的满员率;
 (4) 服务台应从哪些方面改进工作? 理由是什么?

【解】 (I) 因为排队模型为 $M/M/1/5/\infty$, 则当 $\mu=10, \lambda=6$ 时, 有

$$p_N = p_5 = 0.04, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{10} = 0.6$$

(1) 有效到达率为:

$$\lambda_e = \lambda(1-p_5) = 6 \times (1-0.04) = 5.76$$

服务台的服务强度为:

$$\rho = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\lambda(1-p_5)}{\mu} = \frac{6 \times (1-0.04)}{10} = 0.576$$

(2) 系统中平均等待顾客数为:

$$\begin{aligned} L_q &= p_0 \times \frac{\rho^{c-1}}{(c-1)! (c-\rho)^2} [1 - \rho_c^{N-c} - (N-c) \times (1-\rho_c) \times \rho_c^{N-c}] \\ &= 0.42 \times \frac{0.6^0}{0! (1-0.6)^2} [1 - 0.6^4 - (5-1) \times (1-0.6) \times 0.6^{5-1}] \\ &= 0.6962 \end{aligned}$$

则系统中平均顾客数为

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = 0.6962 + \frac{5.76}{10} = 1.2722$$

(3) 系统的满足率为: $p_5 = 0.04$

(4) 由于 $p_0 = 0.42$, 即系统中没有顾客的概率比重大, 服务台增加服务强度。

$$\text{当 } \mu=10, \lambda=15 \text{ 时, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{10} = 1.5$$

(II) 当 $\mu=10, \lambda=15$ 时, $p_5 = 0.37$

(1) 有效到达率为

$$\lambda_e = \lambda(1-p_N) = 15 \times (1-p_5) = 15 \times (1-0.37) = 9.45$$

服务台的强度为

$$\rho = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\lambda(1-p_5)}{\mu} = \frac{15(1-0.37)}{10} = 0.945$$

(2) 系统平均排队等待服务的顾客数为

$$\begin{aligned} L_q &= p_0 \times \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)! (c-\rho)^2} [1 - \rho_c^{N-c} - (N-c) \times (1-\rho_c) \times \rho_c^{N-c}] \\ &= 0.03 \times \frac{1.5^2}{(1-1.5)^2} [1 - 1.5^{5-1} - (5-1) \times (1-1.5) \times 1.5^{5-1}] \\ &\approx 1.64 \end{aligned}$$

$$\text{则 } L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = 1.64 + \frac{9.45}{10} = 2.585$$

(3) 系统的满足率为: $p_5 = 0.37$

(4) 由 $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{10} = 1.5 > 1$, 即 $\lambda > \mu$.

如防止排队队长增大而等待空间有限,而使有些顾客得不到服务而自动离开,因而,服务台应提高服务率.

13.15 对于 $M/M/1/m/m$ 模型,试证

$$L_s = m - \frac{\mu(1-p_0)}{\lambda}$$

并给于直观解释.

【证】 由于系统的有效服务率为:

$$\mu_e = \mu(1-p_0)$$

L_s 表示系统中平均出故障的机器数,则系统外的机器平均数为 $(m-L_s)$, 则系统的有效到达率,即 m 台机器单位时间内实际发生故障的平均数为:

$$\lambda_e = \lambda(m-L_s)$$

当系统达到平衡时

$$\lambda_e = \mu_e$$

则 $\mu(1-p_0) = \lambda(m-L_s)$

$$\text{故 } L_s = m - \frac{\mu(1-p_0)}{\lambda}$$

13.16 对于 $M/M/c/\infty/\infty$ 模型, μ 是每个服务台的平均服务率,试证:

$$(1) L_s - L_q = \lambda/\mu$$

$$(2) \lambda = \mu \left[c - \sum_{n=0}^c (c-n)P_n \right]$$

并给于直观解释.

【注】 在单服务台情况, (1) 式是很容易解释的. 但是 c 个服务台时, 其结果仍相同, 且与 c 无关, 这是引人注意的.

【解】 (1) 因 $L_s = L_q + \bar{c}$, $\bar{c}$ 为系统服务台的平均忙的个数, 即为服务台的强度 ρ , 故

$$L_s - L_q = \rho = \lambda/\mu$$

$$\begin{aligned} (2) \rho &= \sum_{n=0}^{c-1} np_n + c \sum_{n=c}^{\infty} p_n \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} np_n + c \left[1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n \right] \\ &= c - \sum_{n=0}^{c-1} (c-n)p_n \\ &= c - \sum_{n=0}^c (c-n)p_n \end{aligned}$$

$$\text{而 } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{则 } \lambda = \mu\rho = \mu \left[c - \sum_{n=0}^{c-1} (c-n)p_n \right] = \mu \left[c - \sum_{n=0}^c (c-n)p_n \right]$$

其中, $\left[c - \sum_{n=0}^{c-1} (c-n)p_n \right]$ 为系统服务台的平均空闲个数. 则 $c - \sum_{n=0}^c (c-n)p_n$ 为系统服务台的平均忙的个数. 即为服务台的强度 ρ .

13.17 机场有两条跑道, 一条专供起飞用, 一条专供降落用. 已知要求起飞和降落的飞机都分别按平均每小时 25 架次的泊松流到达, 每架飞机起飞或降落占用跑道的的时间都服从平均 2 分钟的负指数分布. 又设起飞和降落是彼此无关的.

(1) 试求一架飞机起飞或降落为等待使用跑道所需的平均时间;

(2) 若机场拟调整使用跑道办法, 每条跑道都可做起飞或降落用. 但为了安全, 每架飞机占用跑道时间延长为平均 2.16 分钟的负指数分布, 这时要求起飞和要求降落的飞机将混合成一个参数为 50 架次/小时的泊松到达流. 试计算这种情形下的平均等待时间.

(3) 以上两种办法哪个更好些呢?

【解】 (1) 本题的排队模型属于 $M/M/1$ 排队系统,

$$M = \frac{60}{2} = 30 \text{ (架/小时)}, \lambda = 25 \text{ (架/小时)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{M} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

等待使用跑道所需的平均时间为

$$w_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{25\left(1-\frac{5}{6}\right)} = \frac{1}{6} \text{ (小时)} = 10 \text{ (分钟)}$$

(2) 本题的排队模型为 $M/M/2$ 排队系统

$$M = \frac{60}{2.16} = \frac{250}{9} \text{ (架/小时)}, \lambda = 50 \text{ (架/时)}, C = 2,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{50}{2 \times \frac{250}{9}} = \frac{9}{10} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{50}{\frac{250}{9}} = \frac{18}{10}$$

平均等待时间

$$\begin{aligned} w_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{(c\rho)^c \rho}{c! (1-\rho)^{2\rho_0}} = \frac{1}{\lambda} \frac{(c\rho)^c \rho}{c! (1-\rho)^2} \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! (1-\rho)} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{50} \frac{\left(2 \times \frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10}}{2! \left(1 - \frac{9}{10}\right)^2} \left[1 + \frac{18}{10} + \frac{\left(\frac{18}{10}\right)^2}{2 \left(1 - \frac{9}{10}\right)} \right]^{-1} \frac{2 \times 9^3}{500} \times \frac{10}{190} = 9.2 \text{ (分钟)} \end{aligned}$$

(3) 显然, 每条跑道都可做起飞或者降落用比较好.

13.18 车间内有 m 台机器, 有 c 个修理工 ($m > c$). 每台机器发生故障率为 λ , 符合 $M/M/c/m/m$ 模型, 试证:

$$\frac{W_s}{\left(\frac{1}{\lambda}\right) + W_s} = \frac{L_s}{m}$$

并说明上式左右两端的概率意义.

【解】 由题设, 排队模型为 $M/M/c/m/m$ 模型.

由 13.14 题可知

$$\lambda_c = \lambda(m - L_s)$$

故

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_c} = \frac{L_s}{\lambda(m - L_s)}$$

则

$$\frac{W_s}{\frac{1}{\lambda} + W_s} = \frac{\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}} = \frac{\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}}{\frac{m}{\lambda(m-L_s)}} = \frac{L_s}{m}$$

一个周期为发生故障的机器在系统中逗留时间 W_s 加上机器连续正常工作时间 $\frac{1}{\lambda}$, 则 $\frac{W_s}{\frac{1}{\lambda} + W_s}$ 为服务台

忙的概率. 而服务台忙的概率也为 $\frac{L_s}{m}$. 故

$$\frac{W_s}{\frac{1}{\lambda} + W_s} = \frac{L_s}{m}$$

13.19 在例9中如售票处使用自动售票机, 顾客在窗口前的服务时间将减少20%. 这时认为服务时间分布的概率密度是

$$f(z) = \begin{cases} 1.25e^{-1.25z+1} & z \geq 0.8 \\ 0 & z < 0.8 \end{cases}$$

(这里的服务时间 z 与例9中(2)的 y 关系很相似 $z=0.8y$) 再求顾客的逗留时间和等待时间.

【解】 由题设有

$$\lambda = \frac{1}{2.5} = 0.4 = \frac{2}{5}, \mu = \frac{1}{2 \times (1-20\%)} = \frac{5}{8}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2/5}{5/8} = \frac{16}{25}$$

由

$$f(z) = \begin{cases} 1.25e^{-1.25z+1}, & z \geq 0.8 \\ 0, & z < 0.8 \end{cases}$$

则

$$f(z) = \begin{cases} 1.25e^{-1.25(z-0.8)}, & z \geq 0.8 \\ 0, & z < 0.8 \end{cases}$$

令 $x = z - 0.8$, 则

$$f(x) = \begin{cases} 1.25e^{-1.25x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则

$$E(x) = \frac{1}{1.25} = 0.8$$

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{1.25^2} = 0.64$$

$$E(z) = E(x+0.8) = E(x) + 0.8 \\ = 0.8 + 0.8 = 1.6$$

$$\text{Var}(z) = \text{Var}[x+0.8] = \text{Var}[x] = 0.64$$

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}[z]}{2(1-\rho)} = 0.64 + \frac{0.64^2 + 0.4^2 \times 0.64}{2(1-0.64)} \approx 1.67$$

$$L_q = L_s - \rho = 1.67 - 0.64 = 1.03$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1.67}{0.4} = 4.2 \text{ (分)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.03}{0.4} = 2.6 \text{ (分)}$$

故, 顾客的逗留时间为 4.2 分, 等待时间为 2.6 分.

13.20 在第 2 题中, 如服务时间服从正态分布, 数学期望值仍是 6 分钟, 方差 $\sigma^2 = 1/8$, 求店内顾客数的期望值.

$$\text{【解】 } \lambda = 4, \quad E[T] = \frac{1}{10} \text{ (h)}, \quad \mu = \frac{1}{E[T]} = 10$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{8}, \text{ 即 } \text{Var}[T] = 8$$

则店内顾客数的期望值为:

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}[T]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{2}{5} + 16 \times \frac{1}{8}}{2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)} = \frac{11}{5}$$

即店内顾客数的平均值为 $\frac{11}{5}$.

13.21 一个办事员核对登记的申请书时, 必须依次检查 8 张表格, 核对每份申请书需 1 分钟. 顾客到达率为每小时 6 人, 服务时间和到达间隔均为负指数分布, 求

(1) 办事员空闲的概率

(2) L_s, L_q, W_s 和 W_q

【解】 由题设知, 此排队系统为 $M/E_k/1$ 排队系统.

$$k = 8, \quad \mu = 60, \quad \lambda = 6$$

$$E[T] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{60}, \quad \text{Var}[T] = \frac{1}{k^2 \mu^2} = \frac{1}{8^2 \times 60^2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

(1) 办事员空闲的概率为:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$(2) L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}[T]}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{(K+1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{(8+1) \times \left(\frac{1}{10}\right)^2}{2 \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times 8} = \frac{17}{160}$$

$$L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)} = \frac{(8+1) \times \left(\frac{1}{10}\right)^2}{2 \times 8 \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{160}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{17}{160} = \frac{17}{960} \text{ (h)}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{160} = \frac{1}{960} \text{ (h)}$$

13.22 对于单服务台情形, 试证:

- (1) 定长服务队列 $L_q^{(1)}$ 是负指数服务队列 $L_q^{(2)}$ 的一半;
 (2) 定长服务时间 $W_q^{(1)}$ 是负指数服务时间 $W_q^{(2)}$ 的一半.

【解】 由 $M/E_k/1$ 排队系统可知

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} - \frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}$$

当 $k=1$ 时, 则 $M/E_k/1$ 模型变为 $M/M/1$ 模型. 即

$$L_q^{(2)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(1-1)\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_q^{(2)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} - \frac{(1-1)\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 则 E_k 分布成为定长服务时间分布. 即 $M/D/1$ 排队模型, 则

$$\begin{aligned} L_q^{(1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \right] = \frac{\rho^2}{1-\rho} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \\ &= \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

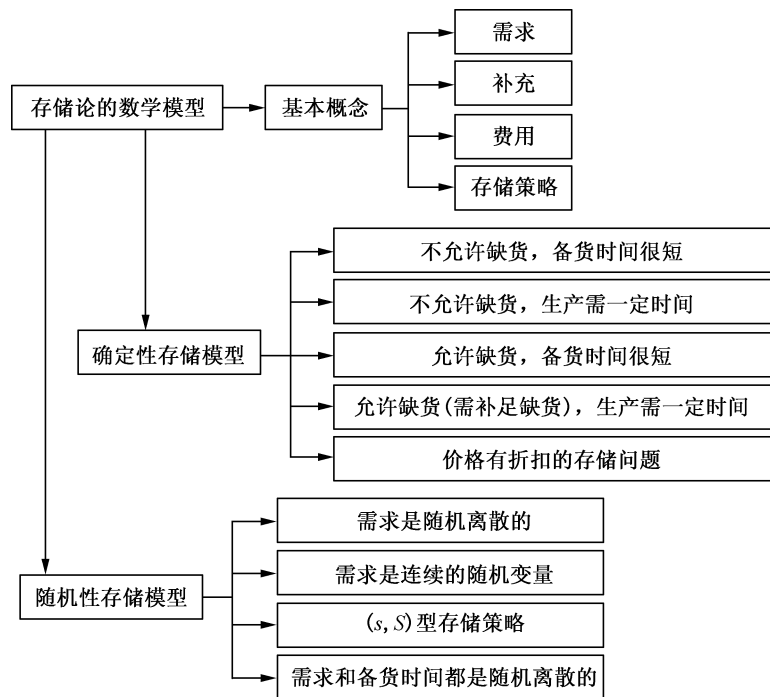
$$\begin{aligned} W_q^{(1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} - \frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)} \right] \\ &= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)} \\ &= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \end{aligned}$$

则

$$L_q^{(1)} = \frac{1}{2} L_q^{(2)}, \quad W_q^{(1)} = \frac{1}{2} W_q^{(2)}$$

第 14 章 存储论

知识结构图



学习要求

1. 掌握几种确定型存储模型.
2. 了解随机单周期库存模型.

重点、难点解答

1. 一个存储问题包括的基本要素有:
 - (1) 需求率.
 - (2) 订货批量.
 - (3) 订货间隔期.
 - (4) 订货提前期.
2. 与存储问题有关的基本费用项目有:
 - (1) 一次费用或准备结束费用.
 - (2) 存储费用.
 - (3) 短缺损失费用.
3. 在一个存储问题中主要考虑: 供应(需求)量的多少, 简称量的问题; 何时供应(需求), 简称期的

问题,按期与量这两个参数的确定性或随机性,将存贮模型分为确定性存贮模型与随机性存贮模型.

课后习题全解

14.1 设某工厂每年需用某种原料 1 800 吨,不需每日供应,但不得缺货.设每吨每月的保管费为 60 元,每次订购费为 200 元,试求最佳定购量.

【解】 由题意,该问题属于“不允许缺货,生产时间很短”模型,由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,其中 C_3 为订购费, R 为需求速度, C_1 为存贮费.

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times \frac{1\,800}{12}}{60}} \approx 32$$

所求最佳订购量为 32 吨.

14.2 某公司采用无安全存量的存贮策略.每年使用某种零件 100 000 件,每件每年的保管费用为 30 元,每次订购费为 600 元,试求:

(1) 经济订购批量.

(2) 订购次数.

【解】 (1) 由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,其中 C_3 为订购费, R 为需求速度, C_1 为存贮费,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 600 \times 100\,000}{30}} = 2\,000 (\text{件})$$

故经济批量为 2 000 件.

$$(2) \text{ 由 } n^* = \frac{R}{Q_0} = \frac{100\,000}{2\,000} = 50$$

故订购次数为 50 次.

14.3 设某工厂生产某种零件,每年需要量为 18 000 个,该厂每月可生产 3 000 个,每次生产的装配费为 5 000 元,每个零件的存贮费为 1.5 元,求每次生产的最佳批量.

【解】 由题意,该问题属于“不允许缺货,生产需一定时间”模型.

已知 $C_3 = 5\,000$, $C_1 = 1.5$, $P = 3\,000$, $R = 18\,000 \div 12 = 1\,500$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} = \sqrt{\frac{2 \times 5\,000 \times 1\,500 \times 3\,000}{1.5 \times (3\,000 - 1\,500)}} \approx 4\,472 (\text{个})$$

所以每次生产的最佳批量为 4 472 个.

14.4 某产品每月用量为 4 件,装配费为 50 元,存贮费每月每件为 8 元,求产品每次最佳生产量及最小费用.若生产速度每月可生产 10 件,求每次生产量及最小费用.

【解】 (1) 由题意,该问题属于“不允许缺货,生产时间很短”模型.

已知 $C_3 = 50$, $R = 4$, $C_1 = 8$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 4}{8}} \approx 7 (\text{件})$$

最小费用为

$$C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2 \times 8 \times 50 \times 4} \approx 56.6 (\text{元})$$

(2) 该问题属于“不允许缺货,生产需一定时间”模型

已知 $C_3 = 50$, $C_1 = 8$, $P = 10$, $R = 4$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 4 \times 10}{8 \times (10-4)}} \approx 9 \text{ (件)}$$

最小费用为

$$C_0 = \sqrt{\frac{2C_1C_3R(P-R)}{P}} = \sqrt{\frac{2 \times 8 \times 50 \times 4 \times (10-4)}{10}} \approx 43.8 \text{ (元)}$$

所以,若生产时间很短,则最佳生产量为 7 件,最小费用为 56.6 元.

若生产速度为 10 件/月,则最佳生产量为 9 件,最小费用为 43.8 元.

14.5 每月需要某种机械零件 2 000 件,每件成本 150 元,每年的存贮费用为成本的 16%,每次订购费 100 元,求 E. O. Q. 及最小费用.

【解】 由题意,该问题属于“不允许缺货,生产时间很短”模型.

已知 $C_3 = 100$, $R = 2\,000 \times 12 = 24\,000$, $C_1 = 150 \times 16\% = 24$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 24\,000}{24}} \approx 447 \text{ (件)}$$

最小费用为

$$C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2 \times 24 \times 100 \times 24\,000} \approx 10\,733 \text{ (元)}$$

所以,最佳批量为 447 件,最小费用为 10 733 元.

14.6 在 14.5 题中如允许缺货,求库存量 s ,及最大缺货量,设缺货费为 $C_2 = 200$ 元.

【解】 该问题属于“允许缺货,生产时间很短”模型.

已知 $C_1 = 24$, $C_2 = 200$, $C_3 = 100$, $R = 24\,000$

$$S = \sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 100 \times 24\,000}{24 \times (24+200)}} \approx 423 \text{ 件}$$

最大缺货量为

$$Q-S = \sqrt{\frac{2RC_1C_3}{C_2(C_1+C_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 24\,000 \times 24 \times 100}{200 \times (24+200)}} \approx 50 \text{ (件)}$$

所以库存量 S 为 423 件,最大缺货量为 50 件.

14.7 某制造厂每周购进某种机械零件 50 件,订购费为 40 元,每周保管费为 3.6 元.

(1) 求 E. O. Q.

(2) 该厂为少占用流动资金,希望存贮量达到最低限度,决定宁可使总费用超过最低费用的 4% 作为存贮策略,问这时订购批量为多少?

【解】 (1) 该问题属于“不允许缺货,生产时间很短”模型

已知 $R = 50$, $C_3 = 40$, $C_1 = 3.6$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 ,得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 40 \times 50}{3.6}} = \frac{10}{3} \approx 33.3$$

而

$$C(Q) = \frac{C_3R}{Q} = \frac{1}{2}C_1Q$$

故

$$C(33) = \frac{40 \times 50}{33} + \frac{1}{2} \times 3.6 \times 33 \approx 120.006$$

$$C(34) = \frac{40 \times 50}{34} + \frac{1}{2} \times 3.6 \times 34 \approx 120.02$$

$$\therefore C(33) < C(34)$$

$$\therefore Q^* = 33$$

(2) 由题意得

$$\frac{C_3 R}{Q'} + \frac{1}{2} C_1 Q' = 120.006 \times (1 + 4\%)$$

代入数据整理得

$$1.8Q'^2 - 120.006 \times 1.04Q' + 4 \times 50 = 0$$

解得 $Q'_1 = 44$, $Q'_2 = 25$

为了少占用流动资金

所以取 $Q' = 25$ 件

14.8 某公司采用无安全存量的存贮策略, 每年需电感 5 000 个, 每次订购费 500 元, 保管费用每年每个 10 元, 不允许缺货. 若采购少量电感每个单价 30 元, 若一次采购 1 500 个以上则每个单价 18 元, 问该公司每次应采购多少个?

(提示: 本题属于订货量多, 价格有折扣的类型. 即订货费 $C_3 + KQ$, K 为阶梯函数.)

【解】 已知 $R = 5\,000$, $C_3 = 500$, $C_1 = 10$

电感单价为一分段函数

$$K(Q) = \begin{cases} 30 \text{ 元} & Q < 1\,500 \\ 18 \text{ 元} & Q \geq 1\,500 \end{cases}$$

由 E. O. Q. 计算 Q_0 , 得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 5\,000}{10}} \approx 707 \text{ (个)}$$

分别计算每次订购 707 个和 1 500 个电感平均每单位电感所需的费用

$$\begin{aligned} C^I(Q_0) &= \frac{1}{2} C_1 \frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{707}{5\,000} + \frac{500}{707} + 30 \\ &\approx 31.414 \text{ (元/个)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{II}(Q_1) &= \frac{1}{2} C_1 \frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{1\,500}{5\,000} + \frac{500}{1\,500} + 18 \\ &= 19.83 \text{ (元/个)} \end{aligned}$$

$$\therefore C^{II}(Q_1) < C^I(Q_0)$$

所以取 $Q^* = 1\,500$ 个, 即该公司每次应采购 1 500 个.

14.9 某工厂的采购情况为

采购数量(单位)	单价(元)
0~1 999	100
2 000 以上	80

假设年需要量为 10 000, 每次订货费为 2 000 元, 存贮费率为 20%, 则每次应采购若干?

【解】 已知 $R = 10\,000$, $C_3 = 2\,000$

单价 $K(Q)$ 为一分段函数

$$K(Q) = \begin{cases} 100 \text{ 元} & Q < 2\,000 \\ 80 \text{ 元} & Q \geq 2\,000 \end{cases}$$

$K_1 = 100$ 时, $C_1 = 100 \times 20\% = 20$

$K_2 = 80$ 时, $C'_1 = 80 \times 20\% = 16$

当 $C_1 = 20$ 时

由 E. O. Q. 计算 Q_0 , 得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 10\,000}{20}} \approx 1\,414 < 2\,000$$

当 $C'_1 = 16$ 时

由 E. O. Q. 计算 Q'_0 , 得

$$Q'_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C'_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 10\,000}{16}} \approx 1\,581 < 2\,000$$

不符合题意应舍去 ($\because C'_1 = 16$ 时, Q'_0 应大于 2 000)

$\therefore Q_0 = 1\,414$

分别计算每次订购 1 414 单位和 2 000 单位平均每单位所需费用

$$\begin{aligned} C^I(Q_0) &= \frac{1}{2} C_1 \frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1 \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{1\,414}{10\,000} + \frac{2\,000}{1\,414} + 100 \\ &\approx 102.828 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{II}(Q_1) &= \frac{1}{2} C'_1 \frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{2\,000}{10\,000} + \frac{2\,000}{2\,000} + 80 \\ &= 82.6 \end{aligned}$$

$\therefore C^{II}(Q_1) < C^I(Q_0)$

所以取 $Q^* = 2\,000$, 即每次应采购 2 000.

14.10 一个允许缺货的 E. O. Q. 模型的费用决不会超过一个具有相同存贮费、订购费、但不允许缺货的 E. O. Q. 模型的费用, 试说明之.

【解】 设单位存贮费用为 C_1 , 订购费为 C_3 , 缺货费为 C_2 , 需求速度为 R , 生产速度为 P .

下面分情况进行讨论:

(1) 生产需一定时间

① 不允许缺货时的存贮策略为

$$\begin{aligned} t_{10} &= \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} \times \sqrt{\frac{P}{P-R}} \\ Q_{10} &= \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{P}{P-R}} \end{aligned}$$

最大存贮量

$$S_{10} = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

费用

$$C(t_{10}) = \sqrt{2C_1C_3R} \times \sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

② 允许缺货时的存贮策略为

$$t_{20} = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \times \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \times \sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \times \sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

最大存贮量

$$S_{20} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \times \sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

费用

$$C(t_{20}) = \sqrt{2C_1 C_3 R} \times \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \times \sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$\because \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} < 1$$

比较 $C(t_{10})$ 和 $C(t_{20})$ 可知

$$C(t_{10}) > C(t_{20})$$

即生产需一定时间时,允许缺货的 E. O. Q. 模型不超过具有相同存贮费、订购费,但不允许缺货的 E. O. Q. 模型的费用。

(2) 生产时间很短.

① 不允许缺货时的存贮策略为

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}, \quad Q_{10} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

最大存贮量

$$S_{10} = Q_{10} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}}$$

费用

$$C(t_{10}) = \sqrt{2C_1 C_3 R}$$

② 允许缺货时的存贮策略为

$$t_{20} = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} \times \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}}$$

最大存贮量

$$S_{20} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \times \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

费用

$$C(t_{20}) = \sqrt{2C_1 C_3 R} \times \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$\because \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} < 1$$

比较 $C(t_{10})$ 和 $C(t_{20})$ 可知

$$C(t_{10}) > C(t_{20})$$

即生产时间很短时,允许缺货的 E. O. Q. 模型的费用不会超过具有相同存贮费、订购费,但不允许缺货

的 E. O. Q. 模型的费用:

综合 (1) (2) 的讨论可得到以下结论:

一个允许缺货的 E. O. Q. 模型的费用决不会超过一个具有相同存贮费、订购费, 但不允许缺货的 E. O. Q. 的模型的费用.

14.11 某厂对原料需求的概率如下表:

需求量 r (单位: 吨)	20	30	40	50	60
概率 $P(r)$ ($\sum P(r) = 1$)	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

每次订购费 $C_3 = 500$ 元, 原料每吨价 $K = 400$ 元, 每吨原料存贮费 $C_1 = 50$ 元, 缺货费每吨 $C_2 = 600$ 元. 该厂希望制订 (s, S) 型存贮策略, 试求 s 及 S 值.

【解】 已知 $C_1 = 50$, $C_2 = 60$, $C_3 = 500$, $K = 400$

① 计算临界值 N .

$$N = \frac{C_2 - K}{C_2 + C_1} = \frac{600 - 400}{600 + 50} = \frac{4}{13}$$

② 求 S .

$$P(r=20) = 0.1 < \frac{4}{13}$$

$$P(r=20) + P(r=30) = 0.1 + 0.2 = 0.3 < \frac{4}{13}$$

$$P(r=20) + P(r=30) + P(r=40) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6 > \frac{4}{13}$$

$\therefore S = 40$

③ 求 s .

s 为满足不等式

$$Ks + \sum_{r \leq s} C_1(s-r)P(r) + \sum_{r > s} C_2(r-s)P(r) \leq C_3 + Ks + \sum_{r \leq S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r-S)P(r)$$

的最小值. 其中 $S = 40$

不等式右端的值.

$$\begin{aligned} & C_3 + Ks + \sum_{r \leq s} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r-S)P(r) \\ &= 500 + 400 \times 40 + 50 \times [(40-20) \times 0.1 + (40-30) \times 0.2 + (40-40) \times 0.3] + \\ & 600 \times [(50-40) \times 0.3 + (60-40) \times 0.1] \\ &= 19\,700 \end{aligned}$$

当 $s = 20$ 时, 左端的值为

$$\begin{aligned} & Ks + \sum_{r \leq s} C_1(s-r)P(r) + \sum_{r > s} C_2(r-s)P(r) \\ &= 400 \times 20 + 50 \times (20-20) \times 0.1 + 600 \times [(30-20) \times 0.2 + (40-20) \times 0.3 + (50-20) \times 0.3 + \\ & (60-20) \times 0.1] \\ &= 20\,600 > 19\,700 \\ &\therefore s = 20 \text{ 不符合.} \end{aligned}$$

当 $s = 30$ 时, 左端的值为

$$\begin{aligned} & Ks + \sum_{r \leq s} C_1(s-r)P(r) + \sum_{r > s} C_2(r-s)P(r) \\ &= 400 \times 30 + 50 \times [(30-20) \times 0.1 + (30-30) \times 0.2] + 600 \times [(40-30) \times 0.3 + \\ & (50-30) \times 0.3 + (60-30) \times 0.1] \end{aligned}$$

$$= 19\,250 < 19\,700$$

$$\therefore s = 30$$

所以该厂的存贮策略为

当存贮 $I \leq 30$ 时, 补充存贮使存贮量达到 40.

当存贮 $I > 30$ 时, 不补充.

14.12 某厂需用配件数量 r 是一个随机变量, 其概率服从泊松分布. t 时间内需求概率为

$$\varphi_i(r) = \frac{e^{-\rho t} (\rho t)^r}{r!} \quad \text{平均每日需求为 } 1 (\rho = 1)$$

拖后时间为 x 天的概率服从正态分布

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

平均拖后时间 $\mu = 14$ 天, 方差 $\sigma^2 = 1$.

在生产循环周期内存贮费 $C_1 = 1.25$ 元, 缺货费 $C_2 = 10$ 元, 装配费 $C_3 = 3$ 元. 问两年内应分多少批订货? 每次批量及缓冲存贮量各为何值才能使总费用最小?

【解】 由 E. O. Q. 计算 Q_0 , 得

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 365}{1.25}} \approx 42$$

$$n_0 = \frac{365 \times 2}{42} \approx 17 \text{ 次}$$

计算 L 和 B , 各步计算出的数值列于表 14-1 中.

表 14-1

(一) 拖后时间 x	(二) 拖后时间的概率 $P(x)$	(三) x 天内的平均需求 $\rho(x)$
	$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-14)^2}{2}}$	
① 13	0.24	13
② 14	0.40	14
③ 15	0.24	15
④ 16	0.05	16
⑤ 17	0.004 4	17

(四) 需求 $r > L, F_x(L)$ 的概率为:

$$F_x(L) = \sum_{r>L} \frac{e^{-x} x^r}{r!} = 1 - \sum_{r=0}^L \frac{e^{-x} x^r}{r!}$$

$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
① 0.236	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0	0
② 0.331	0.029	0.017	0.009	0.005	0.003	0.001	0
③ 0.432	0.053	0.033	0.019	0.011	0.006	0.003	0
④ 0.533	0.089	0.058	0.037	0.022	0.013	0.008	0
⑤ 0.629	0.138	0.095	0.063	0.040	0.025	0.015	0.001

(五) 相应拖后时间及需求概率的乘积 $P(x)F_x(L)$

(五) = (二) × (四)

$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
① 0.056 64	0.003 36	0.001 92	0.000 96	0.000 48	0.002 4	0	0
② 0.132 4	0.011 6	0.006 8	0.000 36	0.002	0.001 2	0.000 4	0
③ 0.103 68	0.012 72	0.007 92	0.004 56	0.002 64	0.001 44	0.000 72	0
④ 0.026 65	0.004 45	0.002 9	0.001 5	0.001 1	0.000 65	0.000 4	0
⑤ 0.002 768	0.000 61	0.000 418	0.000 277 2	0.000 176	0.000 11	0.000 066	0.000 004 4

根据表 14-1 计算出 P_L 、 B 和费用的函数值见表 14-2。

表 14-2

L	$L=15$	$L=21$	$L=22$	$L=23$	$L=24$	$L=25$	$L=26$	$L=31$
P_L	0.322 138	0.032 74	0.019 958	0.0076 572	0.006 396	0.003 64	0.001 586	0.000 004 4
B	1	7	8	9	10	11	12	17
费用	56.014	14.316	13.393	12.552 *	13.587	14.369	15.270	21.251

$$P_L = \sum_{x=13}^{17} P(x)F_x(L), \quad B = L - \rho x$$

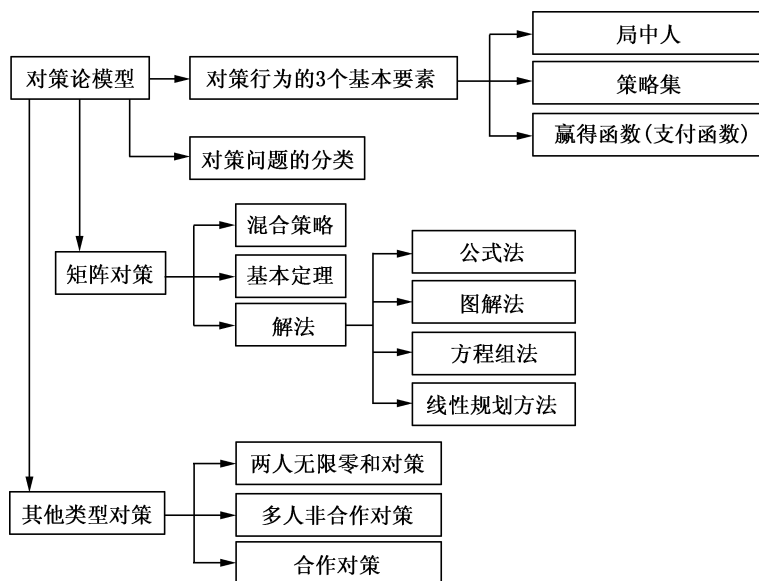
费用计算式为

$$n_0 C_2 P_L + C_1 B$$

故该厂订购批量为 42, 订购点为 23, 两年应分 17 批订购, 缓冲存贮量为 9。

第 15 章 对策论基础

知识结构图



学习要求

1. 熟悉稳妥的原则,局中人 I 按最大最小原则,局中人 II 按最小最大的原则选择各自的纯策略.
2. 掌握有鞍点对策问题的建模及其求解方法.
3. 掌握无鞍点对策问题(矩阵对策混合策略)的建模及其求解方法,包括公式法,图解法,解析法,拉格朗日乘数法,线性规划法,迭代法等.
4. 掌握优超原则.

重点、难点解答

1. 在求解一个矩阵对策时,应首先判断其是否具有鞍点.

当鞍点存在时,局中人 I 按最大最小原则,局中人 II 按最小最大原则选择各自的纯策略,这对双方来说都是一种最为稳妥的行为.

当鞍点不存在时,利用优超原则和课本中的定理 7,定理 8 等提供的方法将原对策的赢得矩阵尽量地化简,然后再利用各种混合策略的方法去求解.

2. 求解方法的比较.

解析法和拉格朗日乘数法不是对所有的有解支付矩阵均能得到正确答案,有时求出的最优混合策略含有负数,由于混合策略是由概率组成的而概率要求非负,这显然不符合概率的定义,主要原因是方法本身没有顾及变量非负的要求,另外,这两种方法对非方阵的支付矩阵不适用.

而线性规划法则和迭代法顾及了变量非负的要求,同时对非方阵的支付矩阵也适用.

3. 迭代法和线性规划方法具有一般性.

课后习题全解

15.1 甲、乙两名儿童玩游戏, 双方可分别出拳头(代表石头)、手掌(代表布)、两个手指(代表剪刀), 规则是: 剪刀赢布, 布赢石头, 石头赢剪刀, 赢者得一分. 若双方所出相同算和局, 均不得分. 试列出儿童甲的赢得矩阵.

【解】 本题为两个局中人, 分别儿童甲和儿童乙. 双方各有三个策略: 策略 1 代表出拳头, 策略 2 代表出手掌, 策略 3 代表出手指, 由题意可得儿童甲的赢得矩阵如表 15-1 所示.

表 15-1

甲的赢得 甲的策略 \ 乙的策略	1	2	3
	1	2	3
1	0	-1	1
2	1	0	-1
3	-1	1	0

15.2 “二指莫拉问题”. 甲、乙二人游戏, 每人出一个或两个手指, 同时又把猜测对方所出的指数叫出来. 如果只有一个人猜测正确, 则他所赢得的数目为二人所出指数之和, 否则重新开始. 写出该对策中各局中人的策略集合及甲的赢得矩阵, 并回答局中人是否存在某种出法比其他出法更为有利.

【解】 用 (x_1, x_2) 表示一个策略, 其中 x_1 表示每人自己所出的手指数, x_2 表示对方所出的手指数, 可见, 局中人甲和乙都各自有 4 个策略: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$; 甲的策略集为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, 其中 $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (1, 2), \alpha_3 = (2, 1), \alpha_4 = (2, 2)$, 乙的策略集为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, 其中 $\beta_1 = (1, 1), \beta_2 = (1, 2), \beta_3 = (2, 1), \beta_4 = (2, 2)$.

甲的赢得表如表 15-2 所示.

表 15-2

甲的赢得 甲的策略 \ 乙的策略	β_1 (1, 1)	β_2 (1, 2)	β_3 (2, 1)	β_4 (2, 2)
	β_1 (1, 1)	β_2 (1, 2)	β_3 (2, 1)	β_4 (2, 2)
$\alpha_1(1, 1)$	0	2	-3	0
$\alpha_2(1, 2)$	-2	0	3	3
$\alpha_3(2, 1)$	3	-3	0	-3
$\alpha_4(2, 2)$	0	-3	3	0

则赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

15.3 求解下列矩阵对策, 其中赢得矩阵 A 分别为

$$(1) \begin{bmatrix} -2 & 12 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

【解】 设矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$, 其中 $S_1 = \{\alpha_i\}$, $S_2 = \{\beta_j\}$, 直接在 A 提供的赢得矩阵上计算, 有

$$(1) \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \min$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 & 12 & -4 \end{bmatrix} -4 \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} 1^* \\ \alpha_3 \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} -5 \end{array}$$

$$\max \quad 1^* \quad 12 \quad 8$$

于是 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 1$

其中 $i^* = 2, j^* = 1$, 故 (α_2, β_1) 是对策的解, 且 $V_G = 1$

$$(2) \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \min$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} 3^* \\ \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} 1 \end{array}$$

$$\max \quad 3^* \quad 4 \quad 6$$

则 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 3$

其中 $i^* = 2, j^* = 1$, 故 (α_2, β_1) 是对策的解, 且 $V_G = 3$.

$$(3) \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \min$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} 2 \\ \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} 3^* \\ \alpha_4 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} 1 \end{array}$$

$$\max \quad 3^* \quad 7 \quad 4 \quad 6$$

则 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 3$

其中 $i^* = 3, j^* = 1$, 故 (α_3, β_1) 是对策的解, 且 $V_G = 3$.

$$(4) \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \min$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} 4^* \\ \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} 2 \\ \alpha_4 \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} 1 \\ \alpha_5 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} 2 \end{array}$$

$$\max \quad 9 \quad 6 \quad 4^* \quad 8 \quad 8$$

则 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 4$

其中 $i^* = 2, j^* = 3$, 故 (α_2, β_3) 是对策的解, $V_G = 4$

15.4 证明本章 15.2.1 节中的性质 1 和性质 2.

【解】 性质 1 的证明

因 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 是对策 G 的解, 则

$$a_{ij_1} \leq a_{i_1j_1} \leq a_{i_1j} \quad (1)$$

对一切的 i 和一切的 j 都成立.

又因 $(\alpha_{ij}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的解, 则

$$a_{ij_2} \leq a_{i_2j_2} \leq a_{i_2j} \quad (2)$$

对一切的 i 和一切的 j 都成立.

由①和②可得

$$a_{i_1j_1} \leq a_{i_1j_2} \leq a_{i_2j_2} \quad (3)$$

$$a_{i_2j_2} \leq a_{i_2j_1} \leq a_{i_1j_1} \quad (4)$$

由③和④得

$$a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}.$$

性质 2 的证明

因 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解, 由性质 1 有

$$a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$$

由③和④, 得

$$a_{ij_2} \leq a_{i_1j_2} \leq a_{i_1j}$$

对一切 i 和一切 j 成立.

因此 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 是对策 G 的解.

同理可证 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也是对策 G 的解.

15.5 甲、乙两个企业生产同一种电子产品, 两个企业都想通过改革管理获得取更多的市场销售份额.

甲企业的策略措施有: ① 降低产品价格; ② 提高产品质量, 延长保修年限; ③ 推出新产品.

乙企业考虑的措施有: ① 增加广告费用; ② 增设维修网点, 扩大维修服务; ③ 改进产品性能.

假定市场份额一定, 由于各自采取的策略措施不同, 通过预测, 今后两个企业的市场占有份额变动情况如表 15-3 所示 (正值为甲企业增加的市场占有份额, 负值为减少的市场占有份额). 试通过对策分析, 确定两个企业各自的最优策略.

表 15-3

甲企业策略	乙企业策略		
	1	2	3
1	10	-1	3
2	12	10	-5
3	6	8	5

【解】 设矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, S_1 表示甲的对策, S_2 表示乙的对策.

在赢得矩阵上计算有

$$\begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \min \\ \alpha_1 \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 \end{bmatrix} -1 \\ \alpha_2 \begin{bmatrix} 12 & 10 & -5 \end{bmatrix} -5 \\ \alpha_3 \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} 5^* \end{array}$$

$$\max_{i,j} 12 \quad 10 \quad 5^*$$

于是 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*,j^*} = 5$

其中 $i^* = 3, j^* = 3$, 故 (α_3, β_3) 是对策的解, 且 $V_G = 5$.

15.6 证明本章中的定理 2.

【证明】 先证充分性, 由于对任意 i, j , 均有

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

故

$$\max_{X \in S_1} E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) < \min_{Y \in S_2} (X^*, Y)$$

又因为

$$\begin{aligned} \min_{X \in S_1} \max_{Y \in S_2} E(X, Y) &\leq \max_{X \in S_1} E(X^*, Y^*) \\ \min_{Y \in S_2} E(X^*, Y) &\leq \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y) \end{aligned}$$

所以

$$\min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} E(X, Y) \leq E(X^*, Y^*) \leq \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y)$$

又因为

$$\max_{S \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y) \leq \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} E(X, Y)$$

故

$$\max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y) = \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} E(X, Y) = E(X^*, Y^*)$$

且

$$V_G = E(X^*, Y^*)$$

必要性: 设有 $X^* \in S_1, Y^* \in S_2$, 使得

$$\begin{aligned} \min_{Y \in S_2} E(X^*, Y) &< \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y) \\ \max_{X \in S_1} E(X, Y^*) &= \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} E(X, Y) \end{aligned}$$

则由

$$\max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} E(X, Y) = \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} E(X, Y)$$

有

$$\max_{X \in S_1} E(X, Y^*) = \min_{Y \in S_2} E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq \max_{X \in S_1} E(X, Y^*) = \min_{Y \in S_2} E(X^*, Y)$$

所以对于任意 $X \in S_1, Y \in S_2$, 有

$$E(X, Y^*) \leq \max_{X \in S_1} E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq \min_{Y \in S_2} E(X^*, Y) \leq E(X^*, Y)$$

即

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

15.7 证明本章中的定理 4.

【证明】 由定理 3, 设 $X^* \in S_1^*, Y^* \in S_2^*$, 则 (X^*, Y^*) 是 G 的解的充要条件是: 对任意 $i = 1, \dots, m$ 和 $j = 1, \dots, n$, 有 $E(i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, j)$

而

$$E(i, Y) = \sum_j a_{ij} y_j \quad i = 1, \dots, m$$

$$E(X, j) = \sum_i a_{ij} x_i \quad j = 1, \dots, n$$

则

$$E(i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*)$$

等价于不等式组

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq V & i = 1, \dots, m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

的解.

$$E(i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*)$$

等价于不等式组

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq V & j = 1, \dots, n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

的解.

15.8 证明本章中的定理 7、定理 8 和定理 9.

【证明】 定理 7:

(1) $\because A_1$ 对应的局中人 I 的赢得函数记为

$$E_1(X, Y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

A_2 对应的局中人 I 的赢得函数记为

$$\begin{aligned} E_2(X, Y) &= \sum_i \sum_j (a_{ij} + L) x_i y_j \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j + \sum_i \sum_j L x_i y_j \\ &= E_1(X, Y) + \sum_i (x_i L \sum_j y_j) \\ &= E_1(X, Y) + \sum_i x_i L \quad (\because \sum_j y_j = 1) \\ &= E_1(X, Y) + \sum_i x_i \\ &= E_1(X, Y) + L \quad (\because \sum_i x_i = 1) \end{aligned}$$

即 $E_2(X, Y) = E_1(X, Y) + L$

又 $\because \max_{X \in S_1} E_2(X, Y) = \max_{X \in S_1^*} (E_1(X, Y) + d) = \max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y) + d$

$$\min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E_2(X, Y) = \min_{Y \in S_2^*} (\max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y) + d) = \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y) + d$$

即 $V_{G_2} = V_{G_1} + L$

(2) 因矩阵 A_1 与矩阵 A_2 的元素一一对应

因而两个对策具有完全相同的对策集合

则 $T(G_1) = T(G_2)$

定理 8: (1) A_1 对应的局中人 I 的赢得函数记为

$$E_1(X, Y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

A_2 对应的局中人 I 的赢得函数记为

$$E_2(X, Y) = \sum_i \sum_j (a a_{ij}) x_i y_j = a \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = a E_1(X, Y)$$

即 $E_2(X, Y) = aE_1(X, Y)$

$$\begin{aligned} \text{又 } \because \max_{X \in S_1^*} E_2(X, Y) &= \max_{X \in S_1^*} (aE_1(X, Y)) = a \max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y) \\ \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E_2(X, Y) &= \min_{Y \in S_2^*} (a \max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y)) = a \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E_1(X, Y) \end{aligned}$$

即 $V_{G_2} = aV_{G_1}$

(2) 因矩阵 A 和矩阵 aA 的元素一一对应.

因而两个对策具有相同的混合策略集合.

则 $T(G_1) = T(G_2)$.

定理 9: (1) $\because A = -A^T$,

则当 $i=j$ 时, $a_{ij} = -a_{ij}$, 则 $a_{ij} = 0$

当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = -a_{ji}$

由题设有

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ji} x_j y_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) x_j y_i \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j = -E(Y, X) \end{aligned}$$

由上式乘 (-1) 并重新排列得

$$E(Y, X^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(Y^*, X)$$

即 Y^* 成了对策者 I 的最优策略, X^* 成了对策者 II 的最优策略.

又由于

$$E(X^*, Y^*) = -E(Y^*, X^*) = V_G, \text{ 即 } V_G = -V_G$$

则 $V_G = 0$

(2) 由 $E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$

即 X^* 为对策者 I 的最优策略, Y^* 为对策者 II 的最优策略

而由题设有

$$E(Y, X^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(Y^*, X)$$

即 Y^* 为对策者 I 的最优策略, X^* 为对策者 II 的最优策略.

由对称性, 则有

$$T_1(G) = T_2(G)$$

15.9 设 G 为 2×2 对策, 且不存在鞍点. 证明若 $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ 和 $y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$ 是 G 的解, 则

$$x_i^* > 0 \quad i=1, 2$$

$$y_j^* > 0 \quad j=1, 2$$

【证明】在 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 中, 不妨设主对角线上的每一个元素均大于副对角线上的每一个元素,

即 $a_{11} > a_{12}, \quad a_{11} > a_{21}, \quad a_{22} > a_{12}, \quad a_{22} > a_{21}$

则

$$(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21}) > 0$$

由习题 15.10, 鞍点不存在的充要条件是有一条对角线的每一个元素均大于另一对角线上的每一元素.

又由公式 (15-25) ~ (15-28) 得

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} > 0$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} > 0$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} > 0$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} > 0$$

即若 $X^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ 和 $Y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$ 是 G 的解, 则

$$x_i^* > 0 \quad i=1, 2, \quad y_j^* > 0 \quad j=1, 2$$

15.10* 证明: 矩阵对策

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

的鞍点不存在的充要条件是有一条对角线的每一个元素均大于另一对角线上的每一元素.

【解】 由于 G 为 2×2 对策, 若存在鞍点, 则鞍点为所在行的最小值, 所在列的最大值, 即

$$a_{ij}^* \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

不妨设 a_{11} 不为鞍点的值, 则

$$\begin{cases} a_{11} \leq a_{12} \\ a_{11} \geq a_{21} \end{cases}$$

有一个不等式不成立,

不妨设

$$\begin{cases} a_{11} > a_{12} \\ a_{11} \geq a_{21} \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

由 a_{21} 不为鞍点的值, 则

$$\begin{cases} a_{21} \leq a_{22} \\ a_{21} \geq a_{11} \end{cases}$$

有一个不等式不成立, 不妨设

$$\begin{cases} a_{21} \leq a_{11} \\ a_{21} > a_{12} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

由①②可得

$$\begin{cases} a_{11} > a_{12} \\ a_{11} > a_{21} \end{cases}$$

同理可证

$$\begin{cases} a_{22} > a_{12} \\ a_{22} > a_{21} \end{cases}$$

即 G 为 2×2 对策, 则不存在鞍点的充要条件为: 有一条对角线的每一个元素均大于另一对角线上的每一元素.

15.11* 推导 2×2 对策的求解公式 (15.25) — (15.29), 并由习题 15.10 的结果证明习题 15.9.

【解】 2×2 对策中局中人 I 的赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

由定理 6 可知, 为求最优混合策略可求下列等式组

$$\begin{aligned} \text{(I) } & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \\ \text{(II) } & \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

当矩阵 A 不存在鞍点, 一定有严格非负解.

由 (I) 得:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

此方程组等价于

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 = 0 \\ (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{11} - a_{12})x_2 = a_{11} - a_{12} \end{cases}$$

则

$$[(a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})]x_2 = a_{11} - a_{12}$$

即

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})}$$

故

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})}, x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})}$$

则

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 \\ &= 1 - \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} \\ &= \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} \end{aligned}$$

对于方程组 (II), 跟方程组 (I) 的对等性, 有

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})}, y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})}$$

把 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 代入方程组 (I) 中的方程①得

$$\begin{aligned} V_G &= a_{11} \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} + a_{21} \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} \\ &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{11}a_{21} + a_{21}a_{11} - a_{21}a_{12}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} \\ &= \frac{a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{21})} \end{aligned}$$

即 $a_{11} > a_{12}, a_{11} > a_{21}, a_{22} > a_{21}, a_{22} > a_{12}$

由 y^* 与 x^* 的对等性

$$y_1^* > 0, \quad y_2^* > 0$$

则 G 为 2×2 对策, 且不存在鞍点, 则若 $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ 和 $y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$ 是 G 的解, 则

$$x_i^* > 0 \quad i=1, 2, \quad y_j^* > 0 \quad j=1, 2$$

15.12 设 $m \times m$ 对策的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

其中当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 1$, 当 $i = j$ 时, $a_{ij} = -1$. 证明此对策的最优策略为

$$x^* = y^* = (1/m, 1/m, \cdots, 1/m)^T$$

$$V_G = \frac{m-2}{m}$$

【解】 由题意

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ -1 & i = j \end{cases}$$

则

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & \cdots & +1 \\ +1 & -1 & +1 & \cdots & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

易知, A 没有鞍点, 设最优混合策略为

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)^T \text{ 和 } y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$$

从矩阵 A 的元素来看, 每个局中人选取每个纯策略的可能性都是存在的, 故可假定 $x_i^* > 0$ 和 $y_j^* > 0, i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, m$, 于是由线性方程组

$$(I) \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m = V & \text{①} \\ x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_m = V & \text{②} \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - x_m = V \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m = 1 \end{cases}$$

和

$$(II) \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m = V \\ y_1 - y_2 + y_3 + \cdots + y_m = V \\ \vdots \\ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots - y_m = V \\ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m = 1 \end{cases}$$

由方程组 (I) 的①和②可得

$$-x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m = x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_m$$

即 $x_1 = x_2$

依此类推得

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m$$

又 $\because x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$

故 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = \frac{1}{m}$

同理可得

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = \frac{1}{m}$$

则此对策的最优策略为

$$x^* = y^* = \left(\frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \cdots \quad \frac{1}{m} \right)^T$$

把 x^* 代入方程组(I)中的①式得

$$V_G = -\frac{1}{m} + \underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{m-1} = \frac{m-2}{m}$$

15.13 利用优超原则求解下列矩阵对策

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

【解】(1) 对于 A , 由于第 3 列的元素优超于第 4 列的元素, 第 1 列的元素又优超于第 3 列的元素, 故可划去第 3、4 列的元素, 得到新的赢得矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

对于 A_1 , 第 3 行的元素优超于第 1 行的元素, 第 4 行的元素优超于第 2 行的元素, 故可划去第 1 行和第 2 行, 得到新的赢得矩阵为

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

对于 A_2 中, $a_{11} = 2$ 为鞍点, 而 $a_{11} = 2$ 在 A 中对应的为 a_{31} .

对于 A_1 , 得到最优策略

$$x_1^* = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \quad \text{和} \quad y_1^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

对策值为 2.

(2) 由于第 3 行优超于第 2 行, 第 4 行优超于第 1 行, 故可划去第 1 行和第 2 行, 得到新的赢得矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

对于 A_1 , 由于第 1 列优超于第 3 列, 第 2 列优超于第 5 列, 故去掉第 3 列和第 5 列, 得到新的赢得矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

对于 A_2 , 由于第 2 列优超于第 3 列, 划去第 3 列, 得到新的赢得矩阵

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

对于 A_3 , 由于第 1 行优越于第 3 行, 划去第 3 行, 得到新的赢得矩阵

$$A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A_4 中, 副对角线上的每一个元素, 均大于对角线上的每一个元素.

由习题 15.10 的结论知, 对于 A_4 , 无鞍点存在.

对于 A_4 , 则由公式:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{6 - 4}{(6 + 7) - (4 + 3)} = \frac{1}{3}$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{6 - 3}{(6 + 7) - (4 + 3)} = \frac{1}{2}$$

$$y_2^* = 1 - y_1^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

由于 A_4 是由 A 的第 3, 4 行和第 1, 2 列组成的子矩阵, 故矩阵对策的最优解为

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对策值的求法求把 x^* 与第 1 或 2 列对应相乘, 或者 y^* 与第 3 或 4 行对应相乘, 例如 x^* 与第 1 列相应相乘得

$$V_G = 0 \times 3 + 0 \times 5 + \frac{1}{3} \times 7 + \frac{2}{3} \times 4 + 0 \times 6 = 5$$

15.14 利用图解法求解下列矩阵对策, 其中 A 为

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 \\ -6 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

【解】 (1) $\beta_1 \quad \beta_2$

$$\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

对于 A , 第一行优越于第二行, 因此, 去掉第二行, 得到

$$A_1 = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & 2 & 4 \\ \alpha_3 & 3 & 2 \\ \alpha_4 & -2 & 6 \end{matrix}$$

设局中人 II 的混合策略为 $\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$

$$2y+4(1-y)=V, \quad 3y+2(1-y)=V, \quad -2y+6(1-y)=V$$

即

$$-2y+4=V, \quad y+2=V, \quad -8y+6=V$$

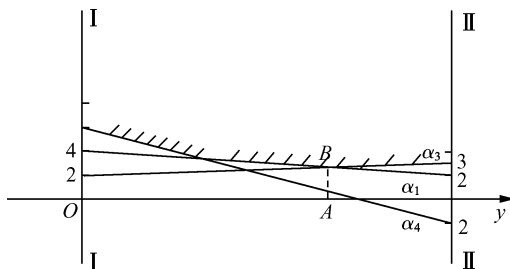


图 15-1

根据最不利当中选取最有利的原则,局中人 II 的最优选择就是如何确定 y , 以便三个纵坐标值中的最大值尽可能地小. 从图 15-1 可知, AB 为对策值.

为求出点 y 和对策的值 V_G , 联立过 B 点两条线段 α_1 和 α_3 所确定的方程

$$\begin{cases} y+2=V_G \\ -2y+4=V_G \end{cases}$$

解得

$$y=\frac{2}{3}, \quad V_G=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

故局中人 II 的最优策略为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$

此外, 从图上还可以看出, 局中人 I 的最优混合策略只由 α_1 和 α_3 组成, 则

$$\begin{cases} 2x_1+3x_3=\frac{8}{3} \\ 4x_1+2x_3=\frac{8}{3} \\ x_1+x_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_3=4x_1+2x_3 \\ x_1=\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

又 $\because x_1+x_3=1$

$$\therefore \frac{1}{2}x_3+x_3=1$$

$$\therefore x_3=\frac{2}{3}, \quad x_1=\frac{1}{3}$$

从而局中 I 的最优混合策略为 $x^*=\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)^T$

$$\begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 \end{bmatrix} \\ (2) \alpha_2 & \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \alpha_3 & \begin{bmatrix} 7 & 8 & -5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A 的第一列优越于第二列, 故划去第二列, 得 A_1 为

$$\begin{matrix} \beta_1 & \beta_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 4 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

A_1 的第三行优越于第一行,故划去第一行,得 A_2 为

$$\begin{matrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

设局中人 II 的混合策略为 $\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{cases} -6y+4(1-y)=V & (\alpha_2) \\ 7y-5(1-y)=V & (\alpha_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10y+4=V & (\alpha_2) \\ 12y-5=V & (\alpha_3) \end{cases}$$

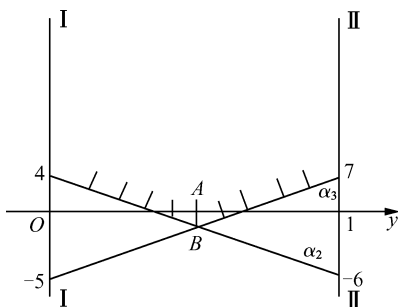


图 15-2

从图 15-2 可知, AB 为对策值. 由

$$\begin{cases} -10y+4=V_G \\ 12y-5=V_G \end{cases}$$

$$\text{得 } y = \frac{9}{22}, \quad V_G = -\frac{1}{11}$$

则局中人 II 的最优策略为 $\left(\frac{9}{22}, 0, \frac{13}{22}\right)^T$

此外,从图上还可看出,局中人 I 的最优混合策略由 α_2 和 α_3 组成,则

$$\begin{cases} -6x_2+7x_3=V_G=-\frac{1}{11} \\ 4x_2-5x_3=V_G=-\frac{1}{11} \\ x_2+x_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x_2+7x_3=4x_2-5x_3 \\ x_2+x_3=1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_2 = \frac{12}{22}, \quad x_3 = \frac{10}{22}$$

故局中人 I 的最优混合策略集为 $X^* = \left(0, \frac{12}{22}, \frac{10}{22}\right)^T$

$$(3) \quad A = \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

由 A 中的第二列,第三列都被第四列优超,故除去第二列,第三列,得到新的赢得矩阵 A_1

$$A_1 = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

设局中人 I 的混合策略为 $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{cases} 4x-4(1-x)=V & (\beta_1) \\ -x+2(1-x)=V & (\beta_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4=V & (\beta_1) \\ -3x+2=V & (\beta_4) \end{cases}$$

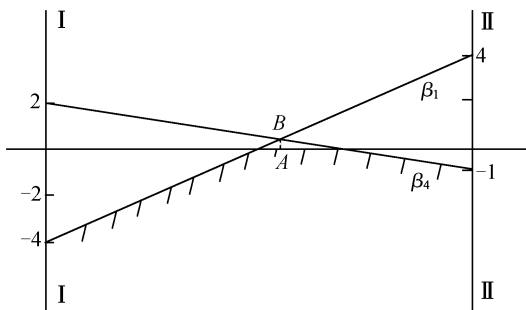


图 15-3

从图 15-3 可看出, AB 为对策值, 由

$$\begin{cases} 8x-4=V_G \\ -3x+2=V_G \end{cases}$$

得

$$x = \frac{6}{11}, V_G = \frac{4}{11}$$

故局中人 I 的最优策略为 $X^* = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11} \right)^T$

此外, 从图上还可看出, 局中人 II 的最优策略由 β_1 和 β_4 组成, 则

$$\begin{cases} 4y_1 - y_4 = V_G = \frac{4}{11} \\ -4y_1 + 2y_4 = V_G = \frac{4}{11} \\ y_1 + y_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_1 - y_4 = -4y_1 + 2y_4 \\ y_1 + y_4 = 1 \end{cases}$$

解得 $y_1 = \frac{3}{11}, y_4 = \frac{8}{11}$

故局中人 II 的最优混合策略为 $Y^* = \left(\frac{3}{11}, 0, 0, \frac{8}{11} \right)^T$

$$(4) A = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

设局中人 I 的混合策略为 $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $x \in [0, 1]$, 过数轴上坐标为 0 和 1 的两点分别作两条垂线 I-I 和 II-II, 垂线上点的纵坐标值分别表示局中人 I 采取纯策略 α_1 和 α_2 时, 局中人 II 采取各种纯策略的赢得值, 如图 15-4 所示. 则当局中人 I 选择每一策略 $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ 时, 他的最少可能收入为局中人 II 选择 $\beta_1, \beta_2,$

β_3 时所确定的三条直线.

$$\begin{cases} 2-x+8(1-x)=V & (\beta_1) \\ 3x+5(1-x)=V & (\beta_2) \\ 11x+2(1-x)=V & (\beta_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x+8=V & (\beta_1) \\ -2x+5=V & (\beta_2) \\ 9x+2=V & (\beta_3) \end{cases}$$

在 x 处的纵坐标中之最小者.

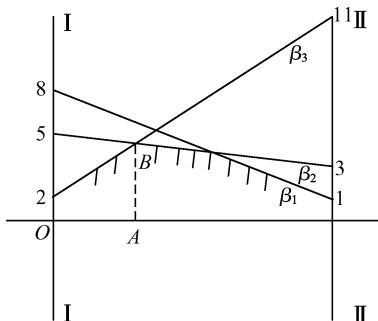


图 15-4

由局中人 I 而言, 他的最优选择为确定 x 使他的收入尽可能多, 由上图按最小最大原则应选择 $x = OA$, 而 AB 即为对策值, 联立过 B 点的两条线段 β_2 和 β_3 所确定的方程

$$\begin{cases} -2x+5=V_G & (\beta_2) \\ 9x+2=V_G & (\beta_3) \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{11}, \quad V_G = 9x+2 = 9 \times \frac{3}{11} + 2 = \frac{49}{11}$$

$$\text{故局中 I 的最优策略为 } X^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11} \right)^T$$

此外, 从图上还可得知, 局中人 II 的最优混合策略只由 β_2 和 β_3 组成, 则

$$\begin{cases} 3y_2+11y_3=V_G=\frac{49}{11} \\ 5y_2+2y_3=V_G=\frac{49}{11} \\ y_2+y_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_2+11y_3=5y_2+2y_3 \\ y_2+y_3=1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } y_2 = \frac{9}{11}, y_3 = \frac{2}{11}$$

又因为 $y_1 = 0$

$$\text{故局中人 II 的最优混合策略为 } Y^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11} \right)^T$$

15.15 已知矩阵对策

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

的解为 $x^* = (6/13, 3/13, 4/13)^T$, $y^* = (6/13, 4/13, 3/13)^T$, 对策值为 $24/13$. 求下列矩阵对策的解, 其赢得矩阵 A 分别为

$$(1) \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 32 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 44 \\ 20 & 38 & 20 \end{bmatrix}$$

【解】 (1) 由 P_{453} 定理 7, 设有两个矩阵对策

$$G_1 = \{S_1, S_2; A_1\}, \quad G_2 = \{S_2, S_2; A_2\}$$

其中 $A_1 = (a_{ij}), A_2 = (a_{ij} + L), L$ 为任一常数, 则

$$\textcircled{1} V_{G_2} = V_{G_1} + L$$

$$\textcircled{2} T(G_1) = T(G_2)$$

已知

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

A 矩阵的每个元素加上 2, 可得矩阵 $\textcircled{1}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

故上述定理可知, $\textcircled{1}$ 矩阵对策的解为

$$x^* = \left(\frac{6}{13} \frac{3}{13} \frac{4}{13} \right)^T, \quad y^* = \left(\frac{6}{13} \frac{4}{13} \frac{3}{13} \right)^T$$

对策值为

$$V_1 = V_A + 2 = \frac{24}{13} + 2 = \frac{50}{13}$$

(2) A 矩阵中每个元素减去 2 可得 $\textcircled{2}$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

故由上述定理可知, $\textcircled{2}$ 的矩阵对策为

$$x^* = \left(\frac{6}{13} \frac{3}{13} \frac{4}{13} \right)^T, \quad y^* = \left(\frac{6}{13} \frac{4}{13} \frac{3}{13} \right)^T$$

对策值为

$$V_2 = V_A - 2 = \frac{24}{13} - 2 = -\frac{2}{13}$$

(3) 将 A 矩阵中的每个元素乘以 3, 再加上 20 可得 $\textcircled{3}$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} 32 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 44 \\ 20 & 38 & 20 \end{bmatrix}$$

由 P_{453} 定理 8:

设有两个矩阵对策

$$G_1 = \{S_1, S_2; A\}, \quad G_2 = \{S_1, S_2; aA\}$$

其中 $a > 0$ 为任一常数, 则

$$\textcircled{1} V_{G_2} = aV_{G_1}$$

$$\textcircled{2} T(G_2) = T(G_1)$$

由上述两个定理结合可得.

设有两个矩阵对策

$$G_1 = \{S_1, S_2; A\}, \quad G_2 = \{S_1, S_2; aA + b\}$$

其中 $a > 0$ 为任一常数, b 为任一常数, 则

$$\textcircled{1} V_{G_2} = aV_{G_1} + b$$

$$\textcircled{2} T(G_2) = T(G_1)$$

故可得③矩阵对策的解为

$$x^* = \left(\frac{6}{13} \quad \frac{3}{13} \quad \frac{4}{13} \right)^T, \quad y^* = \left(\frac{6}{13} \quad \frac{4}{13} \quad \frac{3}{13} \right)^T$$

矩阵对策值为

$$V_c = 3V_A + 20 = 3 \times \frac{24}{13} + 20 = \frac{332}{13}$$

15.16 用线性规划方法求解下列矩阵对策, 其中 A 为

$$(1) \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

【解】 (1) 由题意:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

求解问题可化为两个互为对偶的线性规划问题.

$$(P) \begin{cases} \min w = x_1 + x_2 + x_3 \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max z = y_1 + y_2 + y_3 \\ 8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 6y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法解问题 (D)

将问题 (D) 化为标准型式如下:

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 8y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 = 1 \\ 2y_1 + 6y_2 + 6y_3 + y_5 = 1 \\ 6y_1 + 4y_2 + 4y_3 + y_6 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形表对上述问题进行计算, 如表 15-4.

表 15-4

c_j			1	1	1	0	0	0	θ
C_B	Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	1	[8]	2	4	1	0	0	$\frac{1}{8}$
0	y_5	1	2	6	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$
0	y_6	1	6	4	4	0	0	1	$\frac{1}{6}$
$-z$		0	1	1	1	0	0	0	

1	y_1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	y_5	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{11}{2}$	5	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{22}$
0	y_6	$\frac{1}{4}$	0	$\left[\frac{5}{2}\right]$	1	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{10}$
$-z$		$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	
1	y_1	$\frac{1}{10}$	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
0	y_5	$\frac{1}{5}$	0	0	$\left[\frac{14}{5}\right]$	$\frac{7}{5}$	1	$-\frac{11}{5}$	$\frac{1}{14}$
1	y_2	$\frac{1}{10}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$
$-z$		$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	
1	y_1	$\frac{1}{14}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	
1	y_3	$\frac{1}{14}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$-\frac{11}{14}$	
1	y_2	$\frac{1}{14}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	
$-z$		$-\frac{3}{14}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{7}$	

由上表可得:问题(D)已达到最优解

$$Y^* = \left(\frac{1}{14}, \frac{1}{14}, \frac{1}{14}, 0, 0, 0 \right)^T$$

目标函数的最优值 $\max z = \frac{3}{14}$

$\therefore$ 非基变量 y_4 的检验数 $\sigma_4 = 0$

故问题(D)有无穷多最优解.

由对偶问题的性质可得:

问题(P)的最优解为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{14}, \quad x_3 = \frac{1}{7}$$

目标函数的最优值 $\min w = \frac{3}{14}$

$$\text{故 } V_G = \frac{14}{3}$$

则对策者 I 的最优混合策略为 $\frac{14}{3} \left(0, \frac{1}{14}, \frac{1}{7} \right)^T$, 即 $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^T$

对策者 II 的最优混合策略为 $\frac{14}{3} \left(\frac{1}{14}, \frac{1}{14}, \frac{1}{14} \right)^T$, 即 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$

(2) 由题意:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

求解问题可化为两个互为对偶的线性规划问题.

$$(P) \begin{cases} \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ 2x_1 + x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max(y_1 + y_2 + y_3) \\ 2y_1 + 2y_3 \leq 1 \\ 3y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形法解问题(D)

将问题(D)化为标准型式如下:

$$\max z = y_1 + y_2 + y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2y_1 + 2y_3 + y_4 = 1 \\ 3y_2 + y_3 + y_5 = 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_6 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{cases}$$

对于上述问题用单纯形表进行计算,如表 15-5 所示.

表 15-5

c_j			1	1	1	0	0	0	θ
C_B	Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	1	[2]	0	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$

续表 15-5

0	y_5	1	0	3	1	0	1	0	—
0	y_6	1	1	2	1	0	0	1	1
$-z$		0	1	1	1	0	0	0	
1	y_1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	—
0	y_5	1	0	3	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$
0	y_6	$\frac{1}{2}$	0	[2]	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$
$-z$		$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	
1	y_1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	
0	y_5	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{2}$	
1	y_2	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	
$-z$		$-\frac{3}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	

由上表可得,问题(D)已达到最优解

$$Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0 \right)^T$$

目标函数的最优值 $\max z = \frac{3}{4}$

由对偶问题的性质可得:

问题(P)的最优解为

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

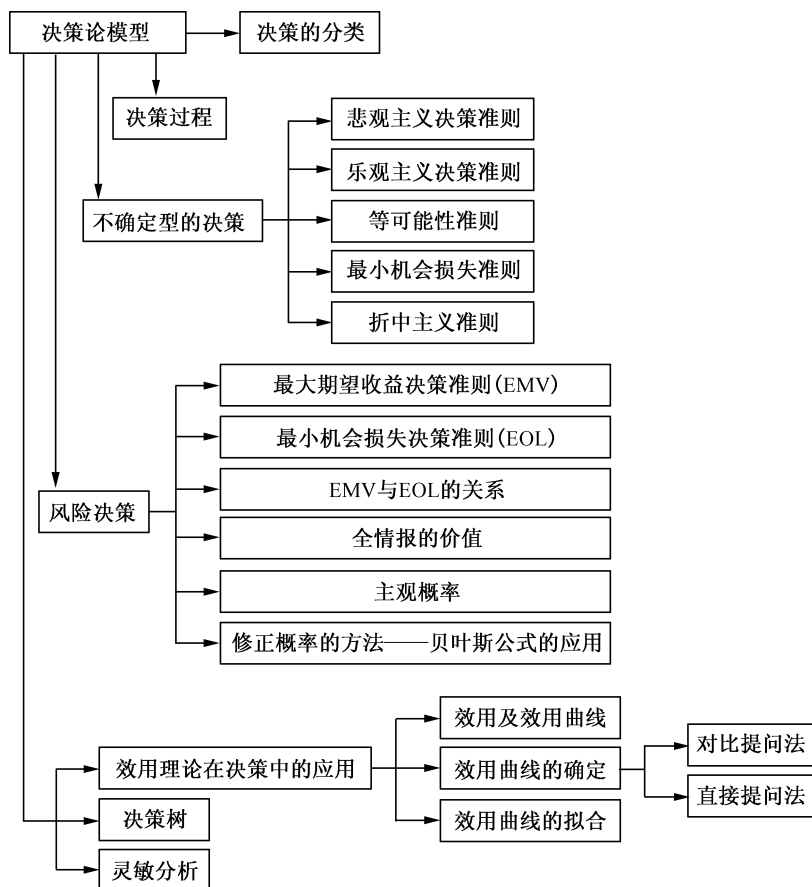
目标函数的最优值 $\min w = \frac{3}{4}$

则对策者 II 的最优策略为 $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0 \right)^T$, 即 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)^T$

对策者 I 的最优策略为 $\frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right)$, 即 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3} \right)$ 且 $V_G = \frac{1}{3} = \frac{4}{4}$

第 16 章 单目标决策

知识结构图



学习要求

1. 掌握不确定型决策及其求解方法.
2. 掌握风险决策及其求解方法.
3. 熟悉效用曲线概念及其作用.
4. 掌握序列决策的决策树求解方法.

重点、难点解答

1. 效用曲线的确定

(1) 直接提问法: 该法向决策者提出一系列问题, 要求决策者进行主观衡量并作出回答, 但是这种

提问与回答是十分含糊的,很难确切,所以应用较少.

(2) 对比提问法:一般采用改进的 $V-M$ 法,即每次取 $p=\frac{1}{2}$,固定 x_1, x_3 , 利用

$$\frac{1}{2}V(x_1) + \frac{1}{2}V(x_3) = V(x_2)$$

改变 x_2 三次,提三问,确定三点,即可给出这决策者的效用曲线.

2. 不确定型决策有 5 种准则:悲观主义准则、乐观主义准则、等可能性准则、最小机会准则、折衷主义准则.

风险决策中一般采用期望值作为决策准则.若决策矩阵为收益矩阵,则采用最大期望收益作为决策准则;若决策矩阵为损失矩阵,则采用最小期望损失作为决策准则.

确定主观概率的方法一般采用专家估计法.

修正概率的方法采用贝叶斯公式计算出各事件的后验概率.

课后习题全解

16.1 某厂考虑生产甲、乙两种产品,根据过去市场需求统计见表 16-1.

表 16-1

方 案	自然状态	旺 季	淡 季
	概 率	$\alpha_1 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
甲 种		4	3
乙 种		7	2

用最大可能性法进行决策.

【解】 从题设所给的表格中可以看出,自然状态为旺季出现的概率最大(即 $P(\alpha_1) = 0.7$),因而出现在旺季的可能性也最大,现在就考虑按这一种自然状态进行决策,则上表就变成如下的表,这样就变成了确定型决策问题.

表 16-2 决策表

市场需求 \ 自然状态	旺 季
甲 种	4
乙 种	7

从上表 16-2 中通过比较可以知道,某厂考虑乙种方案市场需求最大,所以选取乙种方案是最优决策.

16.2 对第 16.1 题用期望值法进行决策并进行灵敏度分析,求出转折概率.

【解】 从第 1 题中所给的表格中,得到每一种方案的市场需求期望值.

$$E(\text{甲}) = 4 \times 0.7 + 3 \times 0.3 = 3.7$$

$$E(\text{乙}) = 7 \times 0.7 + 2 \times 0.3 = 5.5$$

因 $E(\text{乙}) > E(\text{甲})$,所以采取方案乙,市场需求最大.

设 α 为旺季出现的概率,则 $(1-\alpha)$ 为淡季出现的概率,由 $E(\text{甲}) = E(\text{乙})$ 得

$$4 \times \alpha + 3 \times (1-\alpha) = 7 \times \alpha + 2 \times (1-\alpha)$$

$$4\alpha + 3 - 3\alpha = 7\alpha + 2 - 2\alpha$$

$$4\alpha = 1$$

$\therefore \alpha = \frac{1}{4}$, 即转折概率为 $\frac{1}{4}$.

下面进行灵敏度分析

由 $E(\text{甲}) > E(\text{乙})$ 得

$$4 \times \alpha + 3(1 - \alpha) > 7 \times \alpha + 2 \times (1 - \alpha)$$

$$4\alpha + 3 - 3\alpha > 7\alpha + 2 - 2\alpha$$

$$4\alpha < 1$$

$$\therefore \alpha < \frac{1}{4}$$

故当 $\alpha < \frac{1}{4}$ 时, $E(\text{甲}) > E(\text{乙})$, 故甲种方案最优.

当 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时, $E(\text{甲}) < E(\text{乙})$, 故乙种方案最优.

16.3 某公司为了扩大市场,要举行一个展销会,会址打算选择甲、乙、丙三地.获利情况除了与会址有关系外,还与天气有关.天气可区分为晴、普通、多雨三种(分别以 N_1 、 N_2 、 N_3 表示).通过天气预报,估计三种天气情况可能发生的概率为 0.25, 0.50, 0.25.其收益情况见表 16-3,用期望值准则进行决策.

表 16-3

单位:万元

选址方案	自然状态		
	天气:晴(N_1)	普通(N_2)	多雨(N_3)
	概率 0.25	0.50	0.25
甲 地	4	6	1
乙 地	5	4	1.5
丙 地	6	2	1.2

【解】 由上表中所列各种状态概率和效益值,可得每一种选址方案的效益期望值.

$$E(\text{甲}) = 4 \times 0.25 + 6 \times 0.5 + 1 \times 0.25 = 4.25$$

$$E(\text{乙}) = 5 \times 0.25 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.25 = 3.625$$

$$E(\text{丙}) = 6 \times 0.25 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.25 = 2.8$$

由

$$4.25 > 3.625 > 2.8$$

即

$$E(\text{甲}) > E(\text{乙}) > E(\text{丙})$$

可知 $E(\text{甲}) = 4.25$ 最大.

所以,选址为甲地,获利最大.

16.4 将第 16.3 题用矩阵法进行决策.

【解】 由题设可知,效益矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 1.5 \\ 6 & 2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

概率矩阵为

$$P = (0.25 \quad 0.5 \quad 0.25)$$

概率矩阵的转置为

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

期望矩阵为

$$E(A) = \begin{pmatrix} E(\text{甲}) \\ E(\text{乙}) \\ E(\text{丙}) \end{pmatrix} = BP^T$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 1.5 \\ 6 & 2 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.25 \\ 3.625 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

$$\max(4.25, 3.625, 2.8) = 4.25 = E(\text{甲})$$

所以选址为甲地为最优.

16.5 今要建立一个企业,有4个投资方案,三种自然状态,投资数量见表16-4.

表 16-4

单位:百万元

投资方案	自然状态	Q_1	Q_2	Q_3
	概 率	1/2	1/3	1/6
A_1		4	7	4
A_2		5	2	3
A_3		8	6	10
A_4		3	1	9

用矩阵法进行决策.

【解】 由题设中的表格可知,效益矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{概率矩阵为 } P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right)$$

$$\text{概率矩阵的转置为 } P^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right)^T$$

则期望矩阵为

$$E(A) = \begin{pmatrix} E(A_1) \\ E(A_2) \\ E(A_3) \\ E(A_4) \end{pmatrix} = BP^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{6} \\ \frac{22}{6} \\ \frac{46}{6} \\ \frac{20}{6} \end{pmatrix}$$

$$\max\left(\frac{30}{6}, \frac{22}{6}, \frac{46}{6}, \frac{20}{6}\right) = \frac{46}{6} = E(A_3)$$

所以投资方案 A_3 为最优。

16.6 某公司需要决策建大厂还是建小厂来生产一种新产品,该产品的市场寿命为 10 年,建大工厂的投资费用为 280 万,建小厂的投资为 140 万.10 年内销售状况的离散分布的状态如下:

- 高要求量的可能性为 0.5;
- 中等需求量的可能性为 0.3;
- 低需求量的可能性为 0.2.

公司进行了成本—产量—利润分析,在工厂规模和市场容量的组合下,它们的条件收益如下:

- ① 大工厂,需求高,每年获利 100 万元.
- ② 大工厂,需求中等,每年获利 60 万元.
- ③ 大工厂,低需求,由于开工不足,引起亏损 20 万元.
- ④ 小工厂,高需求,每年获利 25 万元(供不应求引起销售损失较大).
- ⑤ 小工厂,中需求,每年获利 45 万元(销售损失引起的费用较低).
- ⑥ 小工厂,低需求,每年获利 55 万元(因工厂规模与市场容量配合得好).

用决策树方法进行决策.

【解】 由题设,决策树如图 16-1 所示:

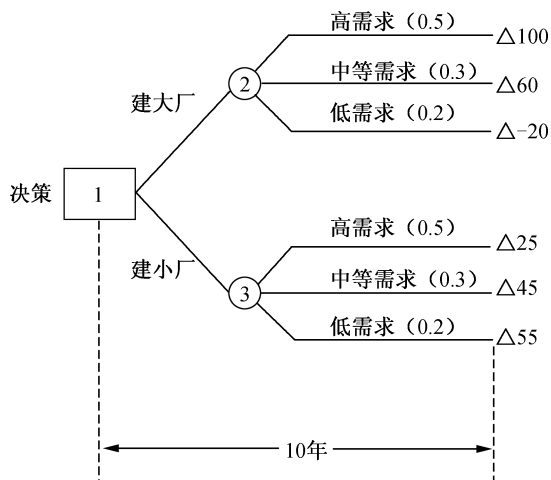


图 16-1

各点的益损期望值为:

2 点:

$$100 \times 0.5 \times 10 + 60 \times 0.3 \times 10 + (-20) \times 0.2 \times 10 - 280 = 640 - 280 = 360 \text{ 万元}$$

3 点:

$$25 \times 0.5 \times 10 + 45 \times 0.3 \times 10 + 55 \times 0.2 \times 10 - 140 = 370 - 140 = 230 \text{ 万元}$$

故建大厂的方案为最优.

16.7 将第 16.5 题用决策树法进行决策.

【解】 由表 16-4, 可画决策树如图 16-2:

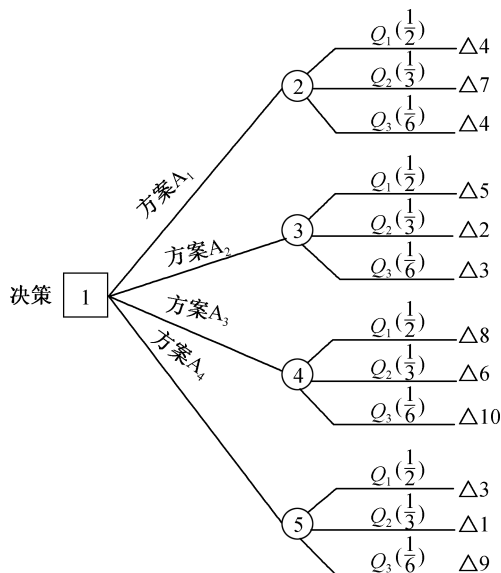


图 16-2

则各点的期望值为

点 2:

$$4 \times \frac{1}{2} + 7 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{30}{6}$$

点 3:

$$5 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{22}{6}$$

点 4:

$$8 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{46}{6}$$

点 5:

$$3 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{20}{6}$$

由

$$\max\left(\frac{30}{6}, \frac{22}{6}, \frac{46}{6}, \frac{20}{6}\right) = \frac{46}{6}$$

故投资方案 A_3 为最优.

16.8 将第 16.6 题用矩阵法决策.

【解】 由第 16.6 题中的题设, 得两个方案的年度益损值列表 16-5:

表 16-5

自然状态	概率	建大厂	建小厂
高需求	0.5	100	25
中等需求	0.3	60	45
低需求	0.2	-20	55

则收益矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 60 & -20 \\ 25 & 45 & 55 \end{pmatrix}$$

概率矩阵为

$$P = (0.5, 0.3, 0.2)$$

概率矩阵转置为

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

则一年的年度的期望矩阵为

$$E_1(A) = \begin{pmatrix} E_1(A_1) \\ E_1(A_2) \end{pmatrix} = BP^T = \begin{pmatrix} 100 & 60 & -20 \\ 25 & 45 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 37 \end{pmatrix}$$

则 10 年的期望为

$$E_{10}(A) = \begin{pmatrix} E_1(A_1) \times 10 - 280 \\ E_1(A_2) \times 10 - 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \times 10 - 280 \\ 37 \times 10 - 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 230 \end{pmatrix}$$

由 $360 > 230$.

故建大厂的方案为最优.

16.9 将第 16.3 题用决策树方法进行决策.

【解】 由第 16.3 题的题设, 可得决策树如图 16-3:

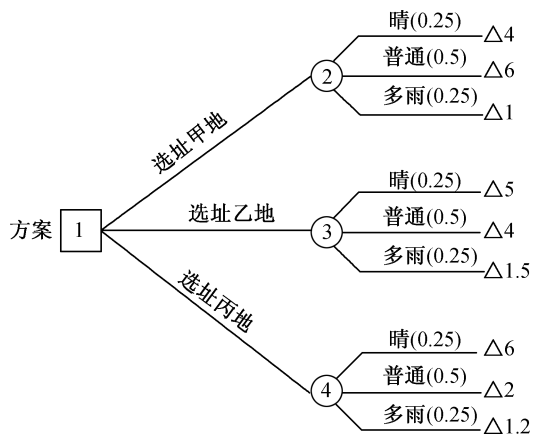


图 16-3

计算各点的期望值为

点 2:

$$4 \times 0.25 + 6 \times 0.5 \times 1 \times 0.25 = 4.25$$

点 3:

$$5 \times 0.25 + 4 \times 0.5 + 1.5 \times 0.25 = 3.625$$

点 4:

$$6 \times 0.25 + 2 \times 0.5 + 1.2 \times 0.25 = 2.8$$

由

$$4.25 > 3.625 > 2.8$$

可知,选址甲地的收益期望最大.

故选址甲地为最优方案.

16.10 某厂有一种新产品,其推销策略有 S_1, S_2, S_3 三种可供选择,但各方案所需的资金、时间都不同,加上市场情况的差别,因而获利和亏损情况不同.而市场情况也有三种: Q_1 (需要量大), Q_2 (需要量一般), Q_3 (需要量低).市场情况的概率并不知道,其损益矩阵见表 16-6,用乐观法进行决策.

表 16-6

单位:万元

$S_i \backslash Q_j$	市场情况		
	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	50	10	-5
S_2	30	25	0
S_3	10	10	10

【解】 由题意,把每个方案在各种自然状态下的最大效益值为:

$$\max_{S_1} \{50, 10, -5\} = 50$$

$$\max_{S_2} \{30, 25, 10\} = 30$$

$$\max_{S_3} \{10, 10, 10\} = 10$$

它们相应的效益值表 16-7 所示:

表 16-7 决策表

单位:万元

方 案	效益矩阵	市场情况			$\max_Q [\alpha(S_i, Q)]$
		Q_1	Q_2	Q_3	
S_1		50*	10	-5	50*
S_2		30*	25	0	30
S_3		10	10	10*	10
决策		$\max_S \{ \max_Q [\alpha(S, Q)] \} = 50$			

则各最大效益的最大值为

$$\max_S \{ \max_Q [\alpha(S, Q)] \} = \max \{50, 30, 10\} = 50$$

最大值 50 对应的行动方案为 S_1 , 故结果选方案 A_2 .

16.11 将 16.10 题用悲观准则进行决策.

【解】 由题设,每个方案在自然状态下的最小效益值分别为:

$$\min_{S_1} \{50, 10, -5\} = -5$$

$$\min_{S_2} \{30, 25, 0\} = 0$$

$$\min_{S_3} \{10, 10, 10\} = 10$$

各个最小效益值的最大值为

$$\max_s \{ \min_Q [\alpha(S, Q)] \} = \max \{-5, 0, 10\} = 10$$

如下表 16-8 所示:

表 16-8 决策表

单位:万元

方案 \ 效益矩阵	市场情况			$\min_Q [\alpha(S_i, Q)]$
	Q	Q_2	Q_3	
S_1	50	10	-5 *	-5
S_2	30	25	0 *	0
S_3	10	10 *	10	10 *
决策→	$\max_s \{ \min_Q [\alpha(S, Q)] \} =$			10

10 对应的行动方案为 S_3 .

故选择方案 S_3 .

16.12 某企业面临三种方案可以选择,五年内的益损表如下表 16-9,用乐观系数法($\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.7$)决策,然后加以比较.

表 16-9

单位:万元

决策方案 \ 自然状态	需求量			
	高	中	低	失败
扩建	50	25	-25	-45
新建	70	30	-40	-80
转包	30	15	-1	-10

【解】 由 $CV_i = \alpha \max_j [a_{ij}] + (1-\alpha) \min_j [a_{ij}]$

也就是先找到每个方案在各自然状态下的最大效益值,乘以 α 加上最小效益值乘以 $(1-\alpha)$,最后比较 CV_i ,若 $CV_k = \max_i (CV_i)$,则选 A_k .

当 $\alpha_1 = 0.3$ 时

$$CV_1 = 50 \times 0.3 + (1-0.3) \times (-45) = 15 - 31.5 = -16.5$$

$$CV_2 = 70 \times 0.3 + (1-0.3) \times (-80) = 21 - 56 = -35$$

$$CV_3 = 30 \times 0.3 + (1-0.3) \times (-10) = 9 - 7 = 2$$

得决策表如表 16-10 所示.

表 16-10 决策表

单位:百万元

自然状态 \ 决策方案	高	中	低	失败	CV_i
扩建(A_1)	50 *	25	-25	-45	-16.5
新建(A_2)	70 *	30	-40	-80	-35
转包(A_3)	30 *	15	-1	-10	2 *

决策→	$\max_i [CV_i] =$	2
-----	-------------------	---

其中加“*”表示最大值,加“-”表示最小值.则

$$\max \{-16.5, -35, 2\} = 2$$

2 对应的方案为转包.

故选择转包

当 $\alpha_2 = 0.7$ 时

$$CV_1 = 50 \times 0.7 + (1 - 0.7) \times (-45) = 35 - 13.5 = 21.5$$

$$CV_2 = 70 \times 0.7 + (1 - 0.7) \times (-80) = 49 - 24 = 25$$

$$CV_3 = 30 \times 0.7 + (1 - 0.7) \times (-10) = 21 - 3 = 18$$

得决策表如表 16-11.

表 16-11 决策表

单位:百万元

自然状态 决策方案	高	中	低	失败	CV_i
扩建(A_1)	50*	25	-25	<u>-45</u>	21.5
新建(A_2)	70*	30	-40	<u>-80</u>	25*
转包(A_3)	30*	15	-1	<u>-10</u>	18
决策→	$\max_i [CV_i] =$				25

则 $\max \{11.5, -7, -14\} = 25$

25 对应的方案为新建

故选择新建.

16.13 将 16.12 题用等可能准则(Laplace)进行决策,并与上题比较结果.

$$\text{【解】 } E(A_1) = 50 \times \frac{1}{4} + 25 \times \frac{1}{4} + (-25) \times \frac{1}{4} + (-45) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$E(A_2) = 70 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + (-40) \times \frac{1}{4} + (-80) \times \frac{1}{4} = -\frac{20}{4}$$

$$E(A_3) = 30 \times \frac{1}{4} + 15 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} + (-10) \times \frac{1}{4} = \frac{34}{4}$$

得决策表如表 16-12.

表 16-12 决策表

单位:百万元

效益矩阵 方案	状态可能性	高	中	低	失败	$E(A)$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
扩建(A_1)		50	25	-25	-45	$\frac{5}{4}$
新建(A_2)		70	30	-40	-80	$-\frac{20}{4}$
转包(A_3)		30	15	-1	-10	$\frac{34}{4}$
决策→		$\max_A [E(A)] =$				$\frac{34}{4}$

$$\max \left\{ \frac{5}{4}, -\frac{20}{4}, \frac{34}{4} \right\} = \frac{34}{4}$$

而 $\frac{34}{4}$ 对应的方案为转包.

故选择转包.

16.14 在开采油井时,出现不定情况,用后悔值准则决定是否开采.益损矩阵见表 16-13.

表 16-13

方案 \ 自然状态	有 油	无 油
	Q	$\bar{Q}$
开 采	5	1
不开采	0	0

【解】 将每种自然状态的最高值(指收益矩阵,损失矩阵应为最低值)订为该状态的理想目标,并将该状态中的其他值与最高值相减所得之差,称为未达到理想之后悔值.

在 Q 状态下,理想值为 5,则

开采的后悔值为 $5-5=0$

不开采的后悔值为 $5-0=5$

在 $\bar{Q}$ 状态下,理想值为 0,则

开采的后悔值为 $0-(-1)=1$

不开采的后悔值为 $0-0=0$

如下表 16-14:

表 16-14 决策表

后悔值 \ 方案 \ 状态	有油	无油
开采(A_1)	0	1
不开采(A_2)	5	0

方案 A_1 的最大后悔值为: $\max(0, 1) = 1$

方案 A_2 的最大后悔值为: $\max(5, 0) = 5$

再求这些最大值中的最小值为 $\min(1, 5) = 1$

而 1 对应的方案为开采.故选择开采.

16.15 某企业要投产一种新产品,投资方案有三个: S_1 、 S_2 、 S_3 ,不同经济形势下的利润如表 16-15 所示.用乐观系数准则($\alpha_1=0.6$, $\alpha_2=0.4$)进行决策.

表 16-15

单位:万元

投资方案	不同经济形势		
	好	平	差
S_1	10	0	-1
S_2	25	10	5
S_3	50	0	-40

【解】 由 $CV_i = \alpha \min_j [a_{ij}] + (1-\alpha) \max_j [a_{ij}]$

当 $\alpha=0.6$ 时

$$CV_1 = 0.6 \times 10 + (1 - 0.6) \times (-1) = 5.6$$

$$CV_2 = 0.6 \times 25 + (1 - 0.6) \times 5 = 13$$

$$CV_3 = 0.6 \times 50 + (1 - 0.6) \times (-40) = 14$$

得决策表如表 16-16.

表 16-16 决策表

单位:万元

收益 方案 \ 状态	好	平	差	CV_i
S_1	10	0	-1	5.6
S_2	25	10	5	13
S_3	50	0	-40	14
决策→	$\max_i [CV_i] =$			14

$$\text{由 } \max\{5.6, 13, 14\} = 14$$

14 对应的方案为 S_3 .

故选取 S_3 .

当 $\alpha = 0.4$ 时

$$CV = 0.4 \times 10 + (1 - 0.4) \times (-1) = 3.4$$

$$CV_2 = 0.4 \times 25 + (1 - 0.4) \times 5 = 13$$

$$CV_3 = 0.4 \times 50 + (1 - 0.4) \times (-40) = -4$$

得决策表如表 16-17.

表 16-17 决策表

单位:万元

收益 方案 \ 状态	好	平	差	CV_i
S_1	10	0	-1	3.4
S_2	25	10	5	13
S_3	50	0	-40	-4
决策→	$\max_i [CV_i] =$			13

$$\max\{3.4, 13, -4\} = 13$$

13 对应的方案为 S_2

故选取 S_2 .

16.16 将 16.15 题用等可能准则进行决策.

$$\text{【解】 } E(S_1) = 10 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-1) \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3}$$

$$E(S_2) = 25 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

$$E(S_3) = 50 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-40) \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

得决策表如表 16-18.

表 16-18

收益可能 方案	状态 性	好	平	差	$E(S)$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
S_1		10	0	-1	$\frac{9}{3}$
S_2		25	10	5	$\frac{40}{3}$
S_3		50	0	-40	$\frac{10}{3}$
决策→		$\max_S [E(S)] =$			$\frac{40}{3}$

$$\text{由 } \frac{40}{3} > \frac{10}{3} > \frac{9}{3}$$

即 $E(S_2) > E(S_3) > E(S_1)$

故选方案 S_2 .

16.17 建厂投资有三个行动方案可以选择, 并有三种自然状态, 其损失见表 16-19, 用乐观准则进行决策.

表 16-19

损失值 方案	自然状态		
	Q_1	Q_2	Q_3
A_1	3	7	3
A_2	6	5	4
A_3	5	6	10

【解】 由于题设中所给的是损失表, 故应采取最小原则, 把各个方案在各种自然状态下的最小损失为:

$$\min_{A_1} \{3, 7, 3\} = 3, \quad \min_{A_2} \{6, 5, 4\} = 4, \quad \min_{A_3} \{5, 6, 10\} = 5$$

$$\text{则 } \min_A \{ \min_Q [\alpha(A, Q)] \} = \min \{3, 4, 5\} = 3$$

得决策表如表 16-20.

表 16-20 决策表

损失值 方案	状态	Q_1	Q_2	Q_3	$\min_Q [\alpha(A_i, Q)]$
A_1		3	7	3	3
A_2		6	5	4	4
A_3		5	6	10	5
决策→		$\min_A \{ \min_Q [\alpha(A, Q)] \} =$			3

3 对应的方案为 A_1 .

故选取 A_1 .

16.18 将 16.17 题用悲观准则进行决策.

【解】 由于为损失矩阵,故用悲观法则进行决策时,应选用最小最大方法.

各个状态下的最大损失值为

$$\max_{A_1} \{3, 7, 3\} = 7, \quad \max_{A_2} \{6, 5, 4\} = 6, \quad \max_{A_3} \{5, 6, 10\} = 10$$

则各个最大损失值的最小值为

$$\min_A \{ \max_Q [\alpha(A, Q)] \} = \min \{7, 6, 10\} = 6$$

得决策表如表 16-21.

表 16-21

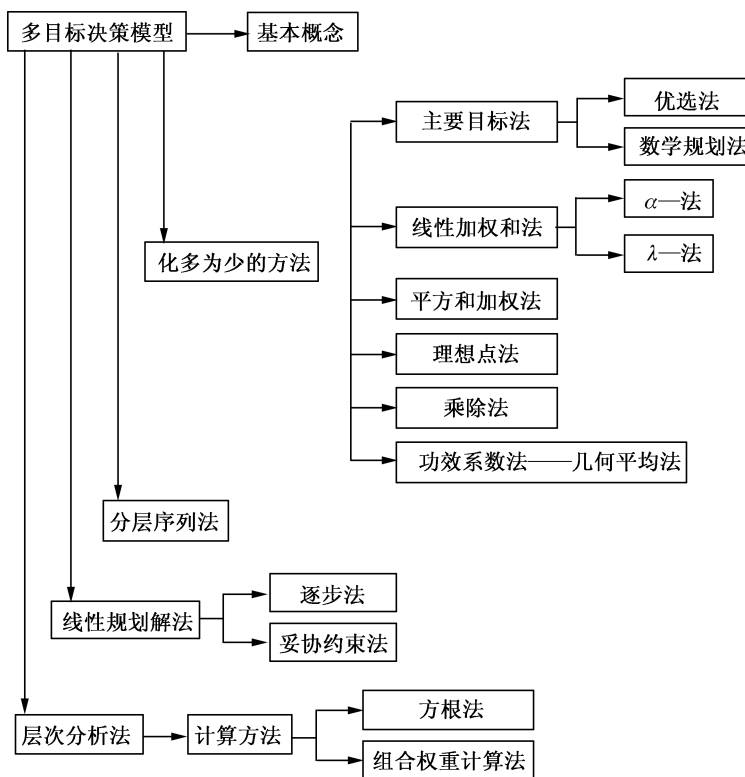
损失值 方案 \ 状态	Q_1	Q_2	Q_3	$\min_Q [\alpha(A_i, Q)]$
A_1	3	7	3	7
A_2	6	5	4	6
A_3	5	6	10	10
决策 →	$\min_A \{ \max_Q [\alpha(A, Q)] \} =$			6

6 对应的决策为 A_2 .

故选取方案 A_2 .

第 17 章 多目标决策

知识结构图



学习要求

1. 理解非劣解和最优解.
2. 掌握化多为少的 6 种方法.
3. 掌握分序列法.
4. 了解直接求非劣解的方法.
5. 掌握多目标线性规划的 2 种方法.
6. 掌握层次分析法的原理和计算方法.

重点、难点解答

1. 在生产、经济、科学和工程活动中经常需要对多个目标(指标)的方案、计划、设计进行好坏的判断,只有对各种因素的指标进行综合衡量后,才能作出合理的决策.

要求若干目标同时都实现最优往往是很困难的,经常是有所失才能有所得,那么问题的失得在何时最

好,各种不同的思路可引出各种不同处理得失的方法,由于直接解决多目标问题的最优化较困难,于是往往是将它们化为较容易求解的单目标或双目标问题,由于化法不一,就形成多种方法.

2. 多目标规划的核心化多为少,或者排序,以至于归一.

化多为少的方法有主要目标法,线性加权和法,平方加权法,理想点法,乘法,几何平均法.

分层法是把目标按其重要性给出一个序列,分为最重要目标,次要目标等.

层次分析法是一种定性与定量分析相结合的多目标决策分析方法构造层次结构图,根据层次结构图确定每一层的各因素的相对重要性的权数,直至计算出措施层各方案的相对权数,这样就给出了各方案的优劣次序.

典型例题精解

17.1 某厂拟从下列4种新研制的产品中组织并选择两种产品进行生产.由于对市场的需求预测不准,故对每种产品,分别估计了在销售好与销售不好情况下的预期利润,上述4种产品均需经A,B两台设备可用的加工时间及有关预期,利润如下表17-1所示.

要求:

- (1) 分别列出各生产方案的多目标、决策模型.
- (2) 对目标 f_1 和 f_2 分别求解,并在以 f_1 和 f_2 为坐标轴的平面坐标上标出各个方案解的相应点.

表 17-1

单位加工时间 设备 \ 产品	1	2	3	4	工时
A	4	3	6	5	45
B	2	5	4	3	30
销售好时预期利润(元·件 ⁻¹)	8	6	10	12	
销售不好时预期利润/(元·件 ⁻¹)	5	5	6	4	

【解】 (1) 共有6种组织生产方案见下表17-2.

表 17-2

方案	I	II	III	IV	V	VI
选择生产的产品	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4

方案 I 的模型为

$$\max z_1 = 8x_1 + 6x_2 = f_1$$

$$\max z_2 = 5x_1 + 5x_2 = f_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

方案 II 的模型为

$$\max z_1 = 8x_1 + 10x_2 = f_1$$

$$\max z_2 = 5x_1 + 6x_2 = f_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

方案Ⅲ的模型为

$$\max z_1 = 8x_1 + 12x_2 = f_1$$

$$\max z_2 = 5x_1 + 4x_2 = f_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

方案Ⅴ的模型为

$$\max z_1 = 6x_1 + 12x_2$$

$$\max z_2 = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

方案Ⅳ的模型为

$$\max z_1 = 6x_1 + 10x_2$$

$$\max z_2 = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

方案Ⅵ的模型为

$$\max z_1 = 10x_1 + 12x_2$$

$$\max z_2 = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 由线性规划的解法,得各方案的解分别为如下表 17-3 所示:

表 17-3

方案		I	II	III	IV	V	VI
解	f_1	90	90	108	75	108	108
	f_2	58.93	56.25	56.25	45	38.44	45

17.2 用线性加权和法中的 α 法求解下述多目标决策问题:

$$f_1(x) = \min \{4x_1 + 6x_2\}$$

$$f_2(x) = \max \{3x_1 + 3x_2\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 因为 $f_1(x)$ 为求最小值,故可作新目标函数:

$$U(x) = \alpha_2 f_2(x) - \alpha_1 f_1(x)$$

$$f_1^0 = \min f_1(x) = 0, \quad f_2^0 = \max f_2(x) = 13$$

$$f_2^* = f_2(x^{(1)}) = 0, \quad f_1^* = f_1(x^{(2)}) = 24$$

$$\text{故 } \alpha_1 = \frac{13}{37}, \quad \alpha_2 = \frac{24}{37}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{13}{37}f_1(x) + \frac{24}{37}f_2(x) \\ &= -\frac{13}{37}(4x_1 + 6x_2) + \frac{24}{37}(3x_1 + 3x_2) = \frac{1}{37}(20x_1 - 6x_2) \end{aligned}$$

由约束条件 x_1 取得最大值 4, x_2 取得最小值 0, 则

$$\max U(x) = U(4, 0) = \frac{1}{37}(20 \times 4 - 6 \times 0) = \frac{80}{37}$$

17.3 用理想点法,求解下述多目标决策问题.

$$f_1(x) = \max \{4x_1 + 4x_2\}$$

$$f_2(x) = \max \{x_1 + 6x_2\}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 $f_1^0 = f_1(x^{(1)}) = f_1(2, 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3 = 20$

$$f_2^0 = f_2(x^{(2)}) = f_2\left(0, \frac{11}{3}\right) = 0 + 6 \times \frac{11}{3} = 22$$

故理想点为

$$F^0 = (f_1^0, f_2^0) = (20, 22)$$

取 $P=2$ 有

$$\begin{aligned} \min_{x \in R} L_2(x) &= \{ [f_1(x) - f_1^0]^2 + [f_2(x) - f_2^0]^2 \}^{\frac{1}{2}} \\ &= [(4x_1 + 4x_2 - 20)^2 + (x_1 + 6x_2 - 22)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由关于 x_1, x_2 的偏导数为零, 即

$$\begin{cases} 2(4x_1 + 4x_2 - 20) \times 4 + 2(x_1 + 6x_2 - 22) = 0 \\ 2(4x_1 + 4x_2 - 20) \times 4 + 2(x_1 + 6x_2 - 22) \times 6 = 0 \end{cases}$$

解得

$$x_1 = 1.45, \quad x_2 = 3.18.$$

对应的目标为

$$f_1 = 4 \times 1.45 + 4 \times 3.18 = 18.52, f_2 = 1.45 + 6 \times 3.18 = 20.53$$

17.4 用妥协约束法解下述多目标线性规划问题.

$$\max z_1 = 4x_1 + 6x_2$$

$$\max z_2 = 7.2x_1 + 3.6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】 对目标 1: 使 x_2 的值取得最大, 因为 x_2 前的系数为 6, x_1 前的系数为 4, 解得

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad z_1^* = 38$$

对目标 2: 使 x_1 的值取得最大, 有

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad z_2^* = 36$$

若取, $w_1 = w_2 = 0.5$, 则有超目标函数

$$\max z = 0.5(4x_1 + 6x_2) + 0.5(7.2x_1 + 3.6x_2) = 5.6x_1 + 4.8x_2$$

妥协约束为

$$0.5(4x_1 + 6x_2 - z_1^*) - 0.5(7.2x_1 + 3.6x_2 - z_2^*) = 0$$

即

$$0.5(4x_1 + 6x_2 - 38) - 0.5(7.2x_1 + 3.6x_2 - 36) = 0$$

化简后为

$$-1.6x_1 + 1.2x_2 = 1, \quad x \in R$$

求得妥协解为

$$x_1 = \frac{43}{17}, \quad x_2 = \frac{143}{34}$$

17.5 给出下列判断矩阵,试求 B 层各元素对准则 A 的权重.

$$\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \\ \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

【解】依题意知,判断矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad n=4$$

则由 $(A - 4I)w = 0$, I 为单位矩阵.即

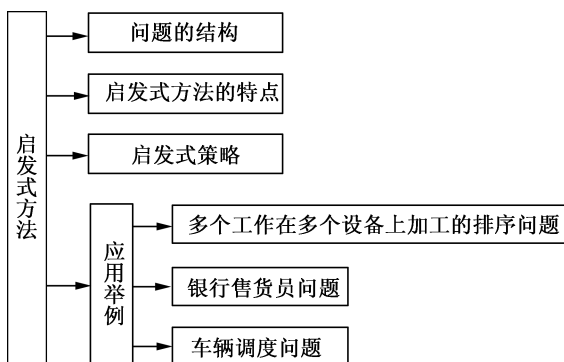
$$\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 7 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0$$

解此齐次线性方程组,得所求权重为

$$w_1 = 0.06, \quad w_2 = 0.49, \quad w_3 = 0.16, \quad w_4 = 0.29$$

第 18 章 启发式方法

知识结构图



学习要求

1. 能理解启发式方法问题的结构.
2. 理解启发式方法的特点.
3. 能运用启发式方法去解决实际问题.

课后习题全解

18.1~18.6 略.

18.7 表 18-1 给出了 12 个工件在设备 A 和 B 上的加工时间,要求:

(1) 若所有工件都先在设备 A 上加工,再在设备 B 上加工,试确定使总加工时间最短的工件加工顺序,并计算总加工时间;

(2) 若工件 8~12 先在设备 B 上加工,再在设备 A 上加工,其他条件同上,试设计一启发式算法,以计算最小总加工时间和安排相应的工件最优加工顺序.

表 18-1

加工时间 \ 工件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
设备 A	5	8	11	2	4	7	12	3	9	3	6	10
设备 B	5	9	4	3	7	6	9	4	5	8	9	4

【解】 (1) 因所有工件都先在设备 A 上加工,再在设备 B 上加工,由启发式迭代步骤:

1) 令 $i=1, k=0$.

2) 找最小加工时间,即

$$t_r = \min \{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

3) 若 $t_r = A_j$, 则安排工件 j 为第 i 个加工工件, 并令 $C' := C' + 1$;

若 $t_r = B_j$, 则安排工件 j 为第 $n-k$ 个加工工件, 并令 $k := k+1$.

4) 将 A_i 和 B_j 从加工时间表中删除, 即不考虑工件 j .

5) 转步骤 2), 直至工件加工时间表变为空集.

由上述步骤:

$i=1, k=0$, 有

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_4 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 t_r = \min \left\{ \begin{array}{l} 5, 8, 11, 2, 4, 7, 12, 3, 9, 3, 6, 10 \\ 5, 9, 4, 3, 7, 6, 9, 4, 5, 8, 9, 4 \end{array} \right\} = \{2\} \\
 B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow
 \end{array}$$

则安排工件 4 为第 1 个加工工件.

$i=1, k=0$, 去掉工件 4, 有

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & A_2 & A_3 & A_5 & \cdots & A_{11} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 t_r = \min \left\{ \begin{array}{l} 5, 8, 11, 4, 7, 12, 3, 9, 3, 6, 10 \\ 5, 9, 4, 7, 6, 9, 4, 5, 8, 9, 4 \end{array} \right\} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 B_1 & B_2 & B_3 & B_5 & \cdots & B_{11}
 \end{array}$$

依此类推, 得到各工件的加工顺序为

$4 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 3$

总加工时间为 $2+3+3+4+5+6+8+12+7+9+10+11+4=84$.

(2) 把工件 1~7 为一组先加工, 再把工件 8~12 为一组加工, 每组分别用所给的启发式算法, 得到工序为 $4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 10$.

总加工时间为 $49+4+4+(3+9+3+6+10)=88$.

若先加工 8~12 件的一组, 得到的工序为 $8 \rightarrow 12 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3$.

总加工时间为 $31+4+49+4=88$.

两组国工先后次序对总工时是一样的.

18.8 有 4 个工件 J_1, J_2, J_3, J_4 , 要求在 3 台设备 A, B, C 上顺次加工, 各工件在各设备上的加工时间示于表 18-2 中, 试构造一启发式算法, 用于寻求使总加工时间最短的工件加工顺序.

表 18-2

加工时间 \ 设备 \ 工件	J_1	J_2	J_3	J_4
A	5	10	9	5
B	7	5	7	8
C	9	4	5	10

【解】 启发式算法如下:

(1) 先作工件的加工时间的工时矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

将计算的节约值列入表 18-3 中:

表 18-3

弧	节约值	弧	节约值
(2,3)	$20.6+14.3-5=26.5$	(4,9)	$8.1+23.4-15.6=15.9$
(2,4)	$20.6+18.1-16.1=22.6$	(4,8)	$8.1+19.7-11.7=26.1$
(2,5)	$20.6+18-7.1=31.5$	(4,10)	$8.1+26.2-18.4=15.9$
(2,6)	$20.6+15.5-18.9=17.2$	(5,6)	$18+15.5-12.1=21.4$
(2,7)	$20.6+24.1-11.1=33.6$	(5,7)	$18+24.1-6.7=35.4$
(2,8)	$20.6+19.7-17.7=22.6$	(5,8)	$18+19.7-10.6=27.1$
(2,9)	$20.6+23.4-13.9=30.1$	(5,9)	$18-23.4-8=33.4$
(3,10)	$20.6+26.2-15.3=31.5$	(5,10)	$18+26.2-10.1=34.1$
(3,4)	$14.4+8.1-8.1=14.4$	(6,7)	$15.5+24.1-14=25.6$
(3,5)	$14.4+18-3.6=28.8$	(6,8)	$15.5+19.7-5=30.2$
(3,6)	$14.4+15.5-10.1=19.8$	(6,9)	$15.5+23.4-11.4=27.5$
(3,7)	$14.4+24.1-10=28.5$	(6,10)	$15.5+26.2-13.9=27.8$
(3,8)	$14.4+19.7-10.8=23.3$	(7,8)	$24.1+19.7-10.2=33.6$
(3,9)	$14.4+23.4-10.4=27.4$	(7,9)	$24.1+23.4-3.6=43.9$
(3,10)	$14.4+26.2-13=27.6$	(7,10)	$24.1+26.2-4.1=46.2$
(4,5)	$8.1+18-11.4=14.7$	(8,9)	$19.7+23.4-7=36.1$
(4,7)	$8.1+24.1-16.6=15.6$	(8,10)	$19.7+26.2-9.2=36.7$
(4,6)	$8.1+15.5-8=15.6$	(9,10)	$23.4+26.2-2.8=46.8$

由 C-W 节约算法,按所有 $s(i,j)$ 由大到小的顺序,逐个考查其端点 i 和 j ,满足条件① i 和 j 不在一条线路上,② i 和 j 都与 1 点相邻,得到加入弧的顺序为

$(9,10) \rightarrow (7,10) \rightarrow (8,9) \rightarrow (5,7) \rightarrow (2,5) \rightarrow (6,8) \rightarrow (2,3) \rightarrow (4,6)$

节约值相应为 46.8, 46.2, 36.1, 35.4, 31.5, 30.2, 26.5, 15.6.

得到的线路为 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4$.

该条旅行线路的总长度为

$Z = 2(20.6+14.4+8.1+18+15.5+24.1+19.7+23.4+26.2) - (46.8+46.2+36.1+35.4+31.5+30.2+26.5+15.6) = 71.7$

(2) 运用几何法.由图 18-1 可知,开始时构成凸包 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 1$,以它为初始旅行线路,重复进行,可以得到本问题的哈密尔顿回路.如图中加“/”的所示,线路为 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

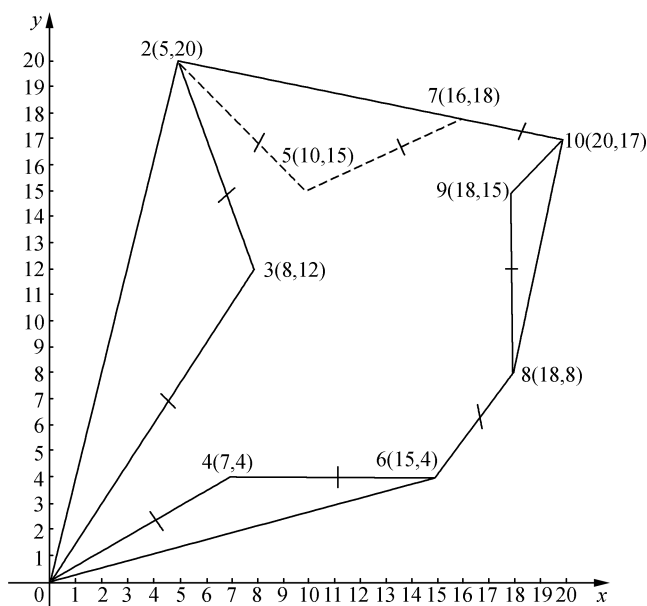


图 18-1

(3) 在工作矩阵 M 中找出最小元素. 若它在最上行, 则将相应的工件排在最前位置; 若它最后行, 则将相应的工件排在最后位置; 如果出现两个最小的. 若 $c_1 = c_2, b_1 < b_2$, 则将工件 1 排在后面.

若 $a_1 = a_2, b_1 < b_2$, 则将工件 1 排在前面.

(4) 按排定位置的工件所对应的列从 M 中划掉, 然后对余下的工作重复按(2)进行. 但那时的最前位置(或最后位置)是在已排定位置的工作之后(或之前). 如此继续下去, 直至把所有工件都排完为止.

由题设, 结合上述步骤将各工件的加工顺序为 $J_1 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3 \rightarrow J_2$, 总工时为 40.

18.9 有 10 个城市, 它们在坐标系中的位置如表 18-4 所示, 试完成以下工件:

- (1) 用 C-W 节约算法求出经过每个城市一次且仅一次的一条最短线路.
- (2) 用 Norback 和 Love 提出的几何法, 求出经过上述每个城市一次且仅一次的最短线路.
- (3) 比较上述两种方法得出的结果, 并设计一种启发式方法, 对上述较差的结果进行改进.

表 18-4

城市 坐标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	5	8	7	10	15	16	18	18	20
y	0	20	12	4	15	4	18	8	15	17

【解】 (1) 由题设所给出的数据计算各点之间的欧氏距离, 计算结果列入距离表 18-5 中, 由于已假设 $c_{ij} = c_{ji}$ (对所有 i 和 j), 故该表中各元素的值以主对角线为对称.

表 18-5

终点 起点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	20.6	144	8.1	18	15.5	24.1	19.7	23.4	26.2
2	20.6	0	8.5	16.1	7.1	18.7	11.1	17.7	13.9	15.3
3	14.4	8.5	0	8.1	3.6	10.1	10	10.8	10.4	13
4	8.1	16.1	8.1	0	11.4	8	16.6	11.7	15.6	18.4
5	18	7.1	3.6	11.4	0	12.1	6.7	10.6	8	10.1
6	15.5	18.7	10.1	8	12.1	0	14	5	11.4	13.9
7	24.1	11.1	10	16.6	6.7	14	0	10.2	3.6	4.1
8	19.7	17.7	10.8	11.7	10.6	5	10.2	0	7	9.2
9	23.4	13.9	10.4	15.6	8	11.4	3.6	7	0	2.8
10	26.2	15.3	13	18.4	10.1	13.9	4.1	9.2	2.8	0

以 T 点为基点, 首先将每个点与该点相连接, 构成线路 $1 \rightarrow j \rightarrow 1 (j > 2, \dots, 10)$, 这样得到了一个具有 $(n-1)$ 条线路的图, 再用公式

$$s(i, j) = c_{1i} + c_{1j} - c_{ij}, \quad i, j \neq 1$$

计算将弧 $(i, j) (i, j \neq 1)$ 标入到线路中时引起的路程节约值.

其线路总长为

$$\begin{aligned} & c(1, 3) + c(3, 2) + c(2, 5) + c(5, 7) + c(7, 10) + c(10, 9) + c(9, 8) + c(8, 6) + c(6, 4) + c(4, 1) \\ & = 14.4 + 8.5 + 7.1 + 6.7 + 4.1 + 2.8 + 7 + 5 + 8 + 8.1 = 71.7 \end{aligned}$$

18.10 有一运输问题, 它有 3 个重载点和 2 个车场, 其运输表如表 18-6 所示. 其中小方框内的数字为两点间的车辆空驶距离, 1, 2 和 3 三个重载点对应的三项运输业务的重载里程 (已将装卸车时间折算在内) 分别为 7, 8 和 9, 其他有关情况如表中所示. 此外, 要求车辆的每条行车路线总长度 (包括重驶、空驶及装卸车所用时间的折算长度) L 在 45~60 之间. 试用本章给出的车辆优化调度启发式算法, 求出其满意的可接受可行解, 并据此排出行车路线.

表 18-6

发空车		收空车								发车数		
		重载点						车场				
		1		2		3		4			5	
重载点	1		4		12		10		8		10	10
	2		2		8		8		6		10	6
	3		12		4		6		14		2	7
车场	4		6		4		6		M		M	≤4
	5		14		2		8		M		M	≤6
收车数		10		6		7		≤8		≤7		

【解】(1) 设由点 i 发往点 j 的空车数为 x_{ij} , 相应的最优解为 $x_{ij}^{(0)}$, 由题意知, 对表中首先只考虑重载点的情况, 利用运输问题的求解方法得到只考虑重载点的最优解为

$$x_{11}^{(0)} = 10, x_{23}^{(0)} = 6, x_{32}^{(0)} = 6, x_{33}^{(0)} = 1, x_{12}^{(0)} = x_{13}^{(0)} = x_{21}^{(0)} = x_{22}^{(0)} = x_{31}^{(0)} = 0$$

(2) 解的扩展.

$$\bar{b}_4 = b_4 - \sum_{j=1}^3 x_{4j}^{(0)} = 4 - 0 = 4, \bar{b}_5 = b_5 - \sum_{j=1}^3 x_{5j}^{(0)} = 6 - 0 = 6$$

$$\bar{b}'_4 = b'_4 - \sum_{j=1}^3 x_{i4}^{(0)} = 8 - 0 = 8, \bar{b}'_5 = b'_5 - \sum_{j=1}^3 x_{i5}^{(0)} = 7 - 0 = 7$$

$$\delta_{11} = \min \{c_{i1} | \bar{b}_i > 0\} + \min_{4 \leq j \leq 5} \{c_{ij} | \bar{b}_j > 0\} - c_{11} = \min \{6, 14\} + \min \{8, 10\} - 4 = 6 + 8 - 4 = 10, b = 4, l = 4$$

$$\delta_{23} = \min_{4 \leq i \leq 5} \{c_{i3} | \bar{b}_i > 0\} + \min_{4 \leq j \leq 5} \{c_{2j} | \bar{b}_j > 0\} - c_{23} = \min \{6, 8\} + \min \{6, 10\} - 8 = 6 + 6 - 8 = 4, k = 4, l = 4$$

$$\delta_{32} = \min_{4 \leq i \leq 5} \{c_{i2} | \bar{b}_i > 0\} + \min_{4 \leq j \leq 5} \{c_{3j} | \bar{b}_j > 0\} - c_{32} = \min \{4, 2\} + \min \{14, 2\} - 4 = 2 + 2 - 4 = 0, k = 5, l = 5$$

$$\delta_{33} = \min_{4 \leq i \leq 5} \{c_{i3} | \bar{b}_i > 0\} + \min_{4 \leq j \leq 5} \{c_{3j} | \bar{b}_j > 0\} - c_{33} = \min \{6, 8\} + \min \{14, 2\} - 6 = 6 + 2 - 6 = 2, k = 4, l = 5$$

故 $\delta_{32} = 0 < \delta_{33} = 2 < \delta_{23} = 4 < \delta_{11} = 10$, 因此可以考虑按照 δ_{ij} 由小到大顺序对 $x_{ij}^{(0)}$ 进行调整

$$\begin{cases} x_{32} = x_{32}^{(0)} - \min \{x_{32}^{(0)}, \bar{b}_5, \bar{b}'_5\} = 6 - \min \{6, 6, 7\} = 0 \\ x_{52} = x_{52}^{(0)} - \min \{x_{32}^{(0)}, \bar{b}_5, \bar{b}'_5\} = 0 + \min \{6, 6, 7\} = 6 \\ x_{35} = x_{35}^{(0)} - \min \{x_{32}^{(0)}, \bar{b}_5, \bar{b}'_5\} = 0 + \min \{6, 6, 7\} = 6 \end{cases}$$

$$\bar{b}'_5 = b'_5 - \sum_{i=1}^3 x_{i5}^{(0)} = b'_5 - x_{35}^{(0)} = 7 - 6 = 1$$

$$\begin{cases} x_{33} = x_{33}^{(0)} - \min \{x_{33}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_5\} = 1 - \min \{1, 4, 1\} = 0 \\ x_{43} = x_{43}^{(0)} - \min \{x_{33}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_5\} = 0 + \min \{1, 4, 1\} = 1 \\ x_{35} = x_{35}^{(0)} - \min \{x_{33}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_5\} = 0 + \min \{1, 4, 1\} = 7 \end{cases}$$

$$\bar{b}'_4 = b'_4 - \sum_{j=1}^3 x_{4j}^{(0)} = b'_4 - x_{43}^{(0)} = 8 - 1 = 7$$

$$\begin{cases} x_{23} = x_{23}^{(0)} - \min \{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 6 - \min \{6, 3, 8\} = 3 \\ x_{43} = x_{43}^{(0)} - \min \{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 1 + \min \{6, 3, 8\} = 4 \\ x_{24} = x_{24}^{(0)} - \min \{x_{23}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min \{6, 3, 8\} = 3 \end{cases}$$

$$\bar{b}_4 = b_4 - \sum_{j=1}^3 x_{4j}^{(0)} = b_4 - x_{43}^{(0)} = 4 - 4 = 0$$

$$\bar{b}'_4 = b'_4 - \sum_{i=1}^3 x_{i4}^{(0)} = b'_4 - x_{24}^{(0)} = 8 - 3 = 5$$

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11}^{(0)} - \min \{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 10 - \min \{10, 0, 5\} = 5 \\ x_{41} = x_{41}^{(0)} - \min \{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min \{10, 0, 5\} = 0 \\ x_{14} = x_{14}^{(0)} - \min \{x_{11}^{(0)}, \bar{b}_4, \bar{b}'_4\} = 0 + \min \{10, 0, 5\} = 0 \end{cases}$$

(3) 解的收缩.

发车数目为

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=4}^5 x_{kj}^{(1)} = x_{43}^{(1)} + x_{52}^{(1)} = 4 + 6 = 10 \leq 4 + 6 = 10$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{l=4}^5 x_{il}^{(1)} = x_{24} + x_{35} = 3 + 7 = 10 \leq 4 + 6 = 10$$

故不需要作解的收缩.

(4) 求解及安排行车路线.

由于 $x_{11}^{(1)} = 10 > 0$, $x_{23}^{(1)} = 3 > 0$, $x_{24}^{(1)} = 3 > 0$, $x_{35}^{(1)} = 7 > 0$, $x_{43}^{(1)} = 4 > 0$, $x_{52}^{(1)} = 6 > 0$, 故 $X^{(1)}$ 为其可行解, 可以按照此方案安排行车路线, 安排线路如下.

① 通车数目为 4, 路线为 $4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$, 线路总长为

$$6 + 10 + 12 + 10 + (7 \times 2 + 9) = 60$$

② 通车数目为 3, 路线为 $5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$, 线路总长度为

$$2 + 2 + 4 + 10 + 2 + (7 \times 2 + 8 + 9) = 20 + 31 = 51$$

③ 通车数目为 3, 路线为 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$, 线路总长度为

$$14 + 12 + 2 + 8 + (7 \times 2 + 8) = 36 + 22 = 58$$