

运筹学试题 (2018 年)

共 10 题。其中第 1-4 题为必答题，第 5-10 题中选做任意 3 题。

第 1 题 (必答题, 16 分): 用线性规划单纯形算法的列表求解法解下面的线性规划问题。注: 若使用穷举或图解方法求出正确解答, 本题可得 10 分。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

第 2 题 (必答题, 16 分): 用分支定界方法或割平面法解下面的两个整数规划问题中的任意一个。

(1)
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 + 7x_2 \leq 35, \\ & 4x_1 + 9x_2 \leq 36, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数.} \end{aligned}$$

Handwritten notes: $x_1=7, x_2=5$ with an arrow pointing to the first constraint; $x_1=9, x_2=4$ with an arrow pointing to the second constraint.

(2)
$$\begin{aligned} \min \quad & z = 4x_1 + 5x_2, \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5, \\ & 3x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数.} \end{aligned}$$

Handwritten notes: 10.5 next to the first constraint; 4.5 next to the second constraint; 2.8 next to the third constraint; 17 at the bottom.

第 3 题 (必答题, 16 分): 用 Dijkstra 算法求解下面的图 1 中从顶点 V_1 到顶点 V_9 的最短路。

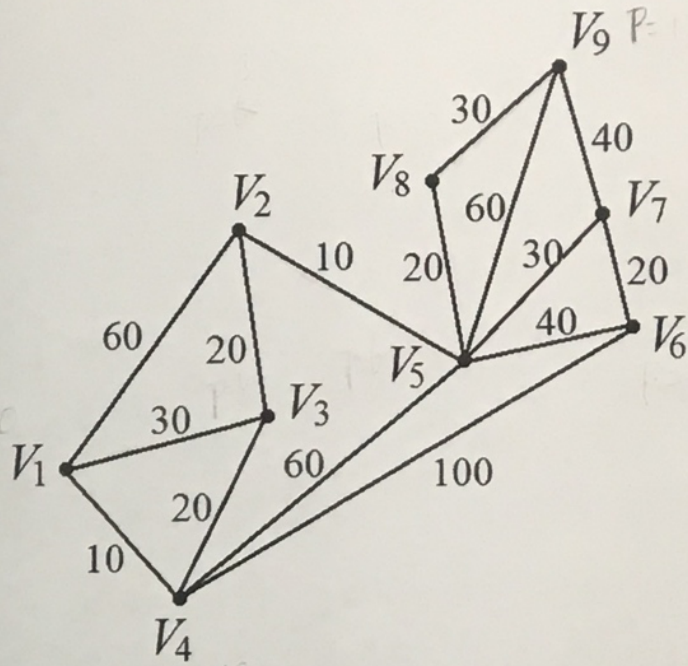


图1: 第3题的图。

$$4+3+2+2$$

$$2+3+4+2$$

$$2+3+2+4$$

第4题 (必答题, 16分): 用动态规划方法解下面的问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 x_2 x_3 x_4, \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ 且为整数.} \end{aligned}$$

$$6+3+2+1=12$$

第5题 (选做题, 12分): 用表上作业法求表1给出的运输问题的最优解。

表1: 产销与运费表 (运费 = 元/吨)

	销售点 B_1	销售点 B_2	销售点 B_3	销售点 B_4	产量 (吨)
产地 A_1	3	11	3	10	7000
产地 A_2	1	9	2	8	4000
产地 A_3	7	4	10	5	9000
销售量 (吨)	3000	6000	5000	6000	

第6题 (选做题, 12分): 求下面的非线性优化问题的解。

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x + 9, \\ \text{s.t.} \quad & g_1(x, y) = x^2 - 2y + 1 \leq 0, \\ & g_2(x, y) = x - 2y + 2 \geq 0, \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

第7题 (选做题, 12分): 本题包括三部分。

- (1) 某排队模型的 Kendall 记号为 $M/M/c/\infty/\infty$ 。解释其中每个符号表示的意思。
- (2) 解释泊松流、负指数分布的含义。
- (3) 假设单位时间平均到达的顾客数是 λ , 单位时间能完成服务的顾客数为 μ 。

列出标准的 $M/M/1$ 模型和标准的 $M/M/c$ 模型的平均队列长、平均队长、平均逗留时间和平均等待时间的计算公式。

第8题 (选做题, 12分): 某商店销售一种商品, 根据以往经验, 售货量为 r 个单位的概率服从下面的表2所示的分布。

表2: 根据历史销售记录制作

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(r)$	0.0024	0.0148	0.0446	0.0892	0.1338	0.1606	0.1606	0.1376	0.1032	0.0688
r	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$P(r)$	0.0413	0.0225	0.0112	0.0051	0.0022	0.0008	0.0003	0.0001	...	...

现在该产品每单位进货价 2000 元。售价 2800 元。如不能售出, 减价为 1600 元就一定能够售出。问该商店现在订购量应为多少单位?

第9题 (选做题, 12分): 假设甲乙二人零和对策的纯策略矩阵 (甲方的赢得矩阵) 是

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

求解这个矩阵对策在混合策略意义下的平衡点。

第 10 题 (选做题, 12 分): 某书店希望订购一种最近出版的 2019 年月历。根据以往经验, 类似月历的销售量在 500 份到 2000 份之间。订购批量可以是 500, 1000, 1500, 2000 份四种当中的一种。假定月历订购价为每份 40 元, 销售价为每份 60 元, 卖不出去时可以按 20 元每份处理。

- (1) 分别用悲观法、乐观法、等可能法决定该书店应该订购多少份月历。
- (2) 书店根据以往销售统计, 类似题材的月历销售量的规律如下表 3。用期望值法计算最佳的订购量。

表3(根据历年销售数统计)

销售量	500	1000	1500	2000
年份占比	20%	40%	30%	10%

考: +20.
石: -20.

说明: 共 10 题, 其中 3 题为必答题, 其它 7 题中选做任意 4 题。

一 (必答题, 20 分). 用单纯形法解下面的线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 \leq 12, \\ 2x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

二 (10 分). 写出下面线性规划问题的对偶问题, 并用图解法求解:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2, \\ 2y_1 + 4y_3 \geq 3, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

三 (10 分). 已知某运输问题的产销平衡表和运价表如下, 求最优调拨方案:

产销平衡表

	销售地A	销售地B	销售地C	销售地D	销售地E	产量
产地1						50
产地2						100
产地3						150
销量	25	115	60	30	70	

运价表

	销售地A	销售地B	销售地C	销售地D	销售地E
产地1	10	15	20	20	40
产地2	20	40	15	30	30
产地3	30	35	40	55	25

四 (必答题, 20 分). 用分支定界或 Gomory 切割法或动态规划方法解下面三个整数规划问题中的任何一个:

问题1:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \leq 51, \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \text{ 为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

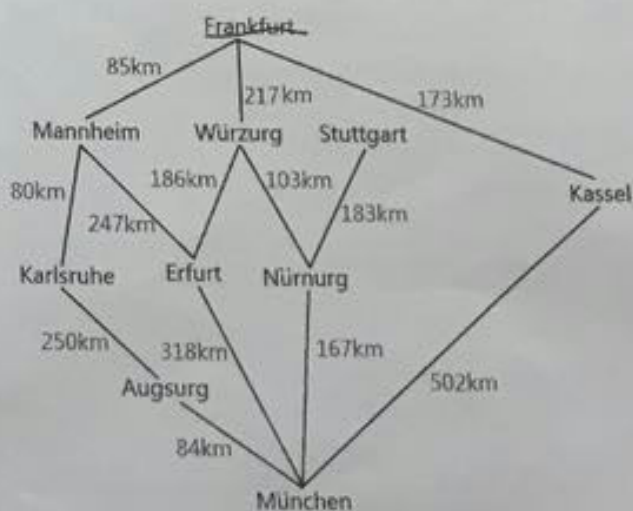
问题2:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

问题3:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 22x_2 + 17x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 20, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 \text{ 为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

五 (必答题, 20 分). 用 Dijkstra 法求下图所示的交通网中从 Frankfurt 到 München 的最短路线:



六 (10 分). 解释表示排队论模型的扩展 Kendall 符号 $X/Y/Z/A/B/C$ 中各字母含义及可能取值, 解释模型 $M/M/1/\infty/\infty$ 中关于顾客达到时间服从的分布和服务时间服从的分布, 写出此排队模型的队长, 队列长, 逗留时间和等待时间等期望值 L_s, L_q, W_s, W_q 的计算公式.

七 (10 分). 某工厂每月按计划生产产品 3610 吨, 每吨每月的存储费 50 元, 每次生产需调整机器设备的装配费 25000 元. 目前该厂每月生产一次. 按照经济批量公式设计一种生产方式, 使存储和装配年均总费用达到最小.

八 (10 分). 考虑矩阵对策 $G = \{S_1, S_2; A\}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix},$$

求解这个矩阵对策.

九 (10 分). 某报亭出售一种报纸, 每出售 100 张获利 15 元, 如果当天不能出售, 每 100 张亏损 20 元. 根据以往销售量统计, 每天售出的该报纸张数的概率是

销售量 (d 张)	500	600	700	800	900	1000	1100
概率 $P(d)$	0.05	0.10	0.20	0.20	0.25	0.15	0.05

问报亭每天订多少张报纸能使获得的利润期望值最大?

★ (10 分). 解下面的优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} y \geq x^2 + 1, \\ y \leq x + 2, \\ x, y \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$